7 Vektoranalysis

7.1 Operatoren

7.1.1 erste Ableitung / Gradient

$$'= \vec{\nabla} \otimes \qquad \varphi' = \mathrm{grad}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}' = \mathrm{grad}\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

7.1.2 Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}(A+B) = \vec{\nabla}A + \vec{\nabla}B$$

$$\vec{\nabla}(A \circ B) = \vec{\nabla}\overset{\downarrow}{A} \circ B + \vec{\nabla}A \circ \overset{\downarrow}{B}$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{x})\vec{c} = (\vec{x} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

7.1.3 Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{\nabla}$$

7.1.4 zweite Ableitung

$$''= \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \qquad \varphi'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

7.1.5 Divergenz

$$\mathrm{div} = \vec{\nabla} \cdot \qquad \mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \ldots$$

$\mathrm{div}\vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ quellenfrei
$\mathrm{div}\vec{v} < 0 \Rightarrow$ Senke
$\mathrm{div}\vec{v} > 0 \Rightarrow$ Quelle

7.1.6 LAPLACE-Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \qquad \Delta\vec{v} = \left(\vec{v} \otimes \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix} \qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial {x_3}^2} + \ldots$$

$\Delta\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi$ ist harmonische Funktion

Δ ist ein Maß für die Abweichung des Funktionswertes an der Stelle vom Mittelwert der Funktionswerte auf einer kleinen Kugel an der Stelle.

7.1.7 Rotation

$$\mathrm{rot} = \vec{\nabla}\times \qquad \mathrm{rot}\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rot}\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow$ wirbelfrei $\Leftrightarrow \mathrm{grad}\vec{v} = \mathrm{grad}\vec{v}^T \Leftrightarrow \vec{v} = -\mathrm{grad}\varphi$

$\mathrm{rot}\vec{v}(\vec{x}) = 2\vec{\omega}$

7.1.8 Rechenregeln

$$\mathrm{grad}(\vec{v}\cdot\vec{w}) = (\mathrm{grad}\vec{v})^T\vec{w} + (\mathrm{grad}\vec{w})^T\vec{v}$$
$$\mathrm{div}(\varphi\vec{v}) = \mathrm{grad}\varphi\cdot\vec{v} + \varphi\cdot\mathrm{div}\vec{v}$$
$$\mathrm{div}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}\cdot\mathrm{rot}\vec{v} - \vec{v}\cdot\mathrm{rot}\vec{w}$$
$$\mathrm{rot}(\varphi\vec{v}) = (\mathrm{grad}\varphi)\times\vec{v} + \varphi\cdot\mathrm{rot}\vec{v}$$
$$\mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{w}) = (\mathrm{div}\vec{w})\cdot\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{w}} - (\mathrm{div}\vec{v})\cdot\vec{w} - \frac{\partial\vec{w}}{\partial\vec{v}}$$
$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \vec{0}$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{v}) = \vec{0}$$
$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v}$$

7.2 Potentiale

7.2.1 Stammfunktionen bei grad

$-\mathrm{grad}\varphi = \vec{v}$

$\mathrm{grad}\vec{v}$ symmetrisch $\Leftrightarrow \frac{\partial v_i}{\partial v_k} = \frac{\partial v_k}{\partial v_i} \underset{\Rightarrow}{\overset{\text{nur falls D einfach zusammenhängend}}{\Leftarrow}} \vec{v}$ konservatives Feld $\Leftrightarrow \exists$ Potential

$$-\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{x_0}^{x} v_x(\xi, y_0, z_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} v_y(x, \xi, z_0)d\xi + \int_{z_0}^{z} v_z(x, y, \xi)d\xi \quad \text{wobei } \varphi(\vec{x}_0) = 0$$

7.2.2 Stammfunktionen bei rot

$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{v}$

$\vec{A}$ Vektorpotential von $\vec{v}$

$\vec{A}_1$ Lösung $\Rightarrow$ weitere Lösung $\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \mathrm{grad}\varphi$ damit COULOMB-Eichung: $\mathrm{div}\vec{A}_2 = 0$

Bedingung: $\mathrm{div}\vec{v} = 0$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = 0$$
$$A_2 = -\int_{z_1}^{z} v_1(x, y, \xi)d\xi$$
$$A_1 = \int_{z_1}^{z} v_2(x, y, \xi)d\xi - \int_{y_1}^{y} v_3(x, \xi, y_1)d\xi$$

7.3 Linienintegrale

$$\int_C \varphi d\vec{s} := \int_{t=a}^{b} \varphi(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) dt$$

$$\int_C \vec{v} \overset{\cdot}{\underset{\otimes}{\times}} d\vec{s} := \int_{t=a}^{b} \vec{v}(\vec{x}(t)) \overset{\cdot}{\underset{\otimes}{\times}} \dot{\vec{x}}(t) dt$$

Wegunabhängigkeit $\Leftrightarrow$ $\vec{v}$ ist konservativ $\underset{\Leftarrow}{\overset{\text{nur falls D einfach zusammenhängend}}{\Rightarrow}}$ $\operatorname{grad}\vec{v}$ symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$

7.4 Oberflächenintegrale

$$\int_F \varphi d\vec{F} := \int_D \varphi(\vec{x}(u,v)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) dD$$

$$\int_F \vec{v} \overset{\cdot}{\underset{\otimes}{\times}} d\vec{F} := \int_D \vec{v}(\vec{x}(u,v)) \overset{\cdot}{\underset{\otimes}{\times}} (\vec{x}_u \times \vec{x}_v) dD$$

7.5 Integralsätze

7.5.1 GAUSS-Integralsätze

$$\int_B \operatorname{div}\vec{v} dB = \int_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{F}$$

Flächeninhalt ebener Flächen in Parameterdarstellung: $F(B) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$

$$\int_B \operatorname{grad}\varphi dB = \int_{\partial B} \varphi d\vec{F}$$

$$\int_B \operatorname{rot}\vec{v} dB = -\int_{\partial B} \vec{v} \times d\vec{F}$$

$$\int_B dB \begin{matrix} \vec{\nabla}\varphi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} \end{matrix} = \int_{\partial B} d\vec{F} \begin{matrix} \varphi \\ \cdot \vec{v} \\ \times \vec{v} \end{matrix} \quad \Rightarrow \int_B dB (\vec{\nabla} \circ \vec{A}) = \int_{\partial B} d\vec{F} \circ \vec{A}$$

7.5.2 GREEN-Formeln

$$\int_B (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi) dB = \int_{\partial B} \varphi \operatorname{grad}\psi \cdot d\vec{F}$$

$$\int_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dB = \int_{\partial B} (\varphi \operatorname{grad}\psi - \psi \operatorname{grad}\varphi) \cdot d\vec{F}$$

$$\int_B (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\psi) dB = \int_{\partial B} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} \cdot d\vec{F}$$

$$\int_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dB = \int_{\partial B} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) \cdot d\vec{F}$$

7.5.3 STOKES-Integralsatz

Randkurven werden so orientiert, daß bei Durchlaufen (Kopf in Richtung $\vec{n}$) die Fläche links liegt.

$$\int_F \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{F} = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} \qquad \Rightarrow \int_F \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{F} = \oint_C \vec{v}\cdot \dot{\vec{x}}dt$$

wenn sich alle geschlossenen Wege in F zuziehen lassen

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \dashrightarrow \quad \vec{v} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \longleftarrow \quad \vec{v} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\int_F \vec{v}\cdot d\vec{F} = 0$$

für alle geschlossenen Flächen F

wenn sich alle geschlossenen Wege zuziehen lassen

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 0 \quad \dashrightarrow \quad \vec{v} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 0 \quad \longleftarrow \quad \vec{v} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = 0$$

für alle geschlossenen Wege C

$$\int_F \operatorname{grad}\varphi \times d\vec{F} = -\oint_{\partial F} \varphi\cdot d\vec{s}$$

$$\int_F \left(d\vec{F}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{w} = -\oint_C \vec{w}\times d\vec{s}$$

$$\int_F \left(d\vec{F}\times\vec{\nabla}\right)\circ\vec{A} = \oint_C d\vec{s}\circ\vec{A}$$

7.6 Krummlinige Koordinaten

Koordinatentransformation: $\vec{x} = \vec{x}\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$

Funktionalmatrix: $J = \dfrac{\partial x_1, \ldots, x_n}{\partial u_1, \ldots, u_n}$

Tangenten an die Koordinatenlinien: $\vec{x}_i = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$

Es werden nur orthogonale Koordinatensysteme betrachtet: $\vec{x}_i \cdot \vec{x}_k = 0 \quad \forall i \neq k$

metrische Koeffizienten des Koordinatensystems: $h_i = \left\|\vec{x}_i\right\|$

durch die Koordinaten (u_1,...,u_n) induzierte physikalische Basis: $\vec{e}_i = \dfrac{1}{h_i}\vec{x}_i$

7.6.1 Felder in krummlinigen Koordinaten

7.6.1.1 Skalarfeld

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\vec{x}\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right) = \tilde{\varphi}\left(u_1, \ldots, u_n\right)$$

7.6.1.2 Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\vec{x})\cdot\vec{e}_i(\vec{x}) \qquad v_i(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x})\cdot\vec{e}_i(\vec{x})$$

7.6.2 Operationen

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\pm\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix}$$

+ wenn $\{\vec{e}_i\}$ Rechtssystem
- wenn $\{\vec{e}_i\}$ Linkssystem

7.6.2.1 Tangenten

$$\dot{\vec{x}}=\frac{d}{dt}\vec{x}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_k}\cdot\dot{u}_k=\sum_{k=1}^{n}\dot{u}_k\cdot h_k\cdot\vec{e}_k$$

7.6.2.2 Integration

$$\int_B\varphi\,dB=\int_{D\ni(\vec{u})}\varphi(u_1,\dots,u_n)\cdot\Delta\cdot du_1du_2\dots du_n$$

$$\int_B\vec{v}\,dB=\int_{D\ni(\vec{u})}\vec{v}(u_1,\dots,u_n)\cdot\Delta\cdot du_1du_2\dots du_n$$

$$\int_C\varphi\,ds=\int_{t_0}^{t}\varphi(u_i(t))\left\|\dot{\vec{x}}\right\|dt=\int_{t_0}^{t}\varphi\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\dot{u}_i^{\,2}h_i^{\,2}}\,dt$$

$$\int_C\vec{v}\cdot d\vec{s}=\int_{t_0}^{t}\vec{v}\cdot\dot{\vec{x}}\,dt=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\cdot h_i\cdot\dot{u}_i\right)dt$$

$$\int_F\vec{v}\cdot d\vec{F}=\pm\int_{t_0}^{t}\vec{v}\cdot(\vec{x}_u\times\vec{x}_v)\,dudv=\pm\int_{t_0}^{t}\det\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & v_3\\ h_1\frac{\partial u_1}{\partial u} & h_2\frac{\partial u_2}{\partial u} & h_3\frac{\partial u_3}{\partial u}\\ h_1\frac{\partial u_1}{\partial v} & h_2\frac{\partial u_2}{\partial v} & h_3\frac{\partial u_3}{\partial v}\end{pmatrix}dudv$$

+ bzw. - falls $\vec{x}_u\times\vec{x}_v$ in bzw. gegen die Normalenrichtung zeigt.

7.6.2.3 Differentiation

$$\operatorname{grad}\varphi=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\cdot\frac{1}{h_k}\cdot\vec{e}_k$$

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{1}{h}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{h}{h_k}v_k\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\frac{1}{h}\cdot\det\begin{pmatrix}h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3\\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3}\\ h_1v_1 & h_2v_2 & h_3v_3\end{pmatrix}$$

$$\Delta\varphi=\frac{1}{h}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{h}{h_k^{\,2}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right)$$

$$h=h_1\cdot h_2\cdot\ldots\cdot h_n$$

7.6.3 Spezielle Koordinaten

7.6.3.1 Kugelkoordinaten

$h_1=h_r=1$ $\qquad$ $h_2=h_\varphi=r\cdot\cos\nu$ $\qquad$ $h_3=h_\nu=r$

$$\vec{e}_1=\vec{e}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\nu\\ \sin\varphi\cos\nu\\ \sin\nu\end{pmatrix}\qquad\vec{e}_2=\vec{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\qquad\vec{e}_3=\vec{e}_\nu=\begin{pmatrix}-\cos\varphi\sin\nu\\ -\sin\varphi\sin\nu\\ \cos\nu\end{pmatrix}$$

7.6.3.2 Zylinderkoordinaten

$h_1 = h_r = 1$ $\quad h_2 = h_\varphi = r$ $\quad h_3 = h_z = 1$

$\vec{e}_1 = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_3 = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.7 Transporttheoreme

Deformationsmatrix $F = \dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)} = \vec{x} \otimes \vec{\nabla}_\zeta$

Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$

$\operatorname{grad}_x \vec{v} = \vec{v} \otimes \vec{\nabla}_x = \dfrac{\partial(\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)}{\partial(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)} \cdot \dfrac{\partial(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \dot{F} \cdot F^{-1}$

$\Delta = \det F \qquad \dot{\Delta} = \Delta \cdot \operatorname{Sp}\left(\dot{F} \cdot F^{-1}\right)$

$\dot{\Delta} = \Delta \cdot \operatorname{div}_x \vec{v}$

7.7.1 Volumenintegrale

$$I(t) = \int_{B_t} \varphi \, dB \qquad \dot{I}(t) = \int_{B_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{v}) \right) dB = \int_{B_t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dB + \int_{\partial B_t} \varphi \vec{v} \, d\vec{F}$$

$$\vec{I}(t) = \int_{B_t} \vec{A} \, dB \qquad \dot{\vec{I}}(t) = \int_{B_t} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{A} \otimes \vec{v}\right) \vec{\nabla} \right) dB = \int_{B_t} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dB + \int_{\partial B_t} \left(\vec{A} \otimes \vec{v}\right) d\vec{F}$$

7.7.2 Flächenintegrale

$$\vec{I}(t) = \int_{F_t} \varphi \, d\vec{F} \qquad \dot{\vec{I}}(t) = \int_{F_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \operatorname{div} \vec{v} - \varphi \left(\operatorname{grad} \vec{v}\right)^T \right) d\vec{F}$$

$$I(t) = \int_{F_t} \vec{A} \cdot d\vec{F} \qquad \dot{I}(t) = \int_{F_t} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{rot}\left(\vec{A} \otimes \vec{v}\right) \right) d\vec{F} = \int_{F_t} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{div} \vec{A} \right) d\vec{F} + \int_{\partial F_t} \left(\vec{A} \times \vec{v}\right) d\vec{s}$$

7.7.3 Linienintegrale

$$\vec{I}(t) = \int_{C_t} \varphi \, d\vec{s} \qquad \dot{\vec{I}}(t) = \int_{C_t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \operatorname{grad} \vec{v} \right) d\vec{s}$$

$$I(t) = \int_{C_t} \vec{A} \cdot d\vec{s} \qquad \dot{I}(t) = \int_{C_t} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\operatorname{grad} \vec{v}\right)^T \cdot \vec{A} \right) d\vec{s}$$

8 Funktionentheorie

8.1 Grundlagen

$z = x + i \cdot y = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arg z = \arctan \dfrac{y}{x}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$ $\qquad k = 0 \ldots n-1$

8.2 einige komplexe Funktionen

$e^z = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$
$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i \cdot \cos x \cdot \sinh y$
$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - i \cdot \sin x \cdot \sinh y$
$\sinh z = \sinh x \cdot \cos y + i \cdot \cosh x \cdot \sin y$
$\cosh z = \cosh x \cdot \cos y + i \cdot \sinh x \cdot \sin y$

8.3 Differenzierbarkeit

$f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$

differenzierbar $\Leftrightarrow$ holomorph $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$ CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen

$f' = u_x + i \cdot v_x = \frac{1}{i}\left(u_y + i \cdot v_y\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

8.4 Eigenschaften

$f = u + i \cdot v$ holomorph $\Leftrightarrow \Delta u = 0 \quad \Delta v = 0$
$\Rightarrow u = \text{const} \perp v = \text{const}$
$\Rightarrow$ Abbildung konform (maßstabs- und winkeltreu)

MÖBIUS-Transformation

$f = \dfrac{az + b}{cz + d}$ $\qquad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \qquad f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \qquad f(\infty) = \frac{a}{c}$

8.5 Anwendung: Potentiale

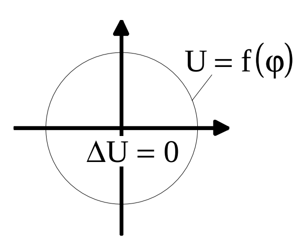
8.5.1 Bezeichnungen

Potentialfeld: $v = x - iy$
komplexes Potential von v: $f = P + iQ$ mit $v = -\overline{f'}$
reelles Potential von v: $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$
Potentiallinien: $P = \text{const.}$
Stromlinien: $Q = \text{const.}$

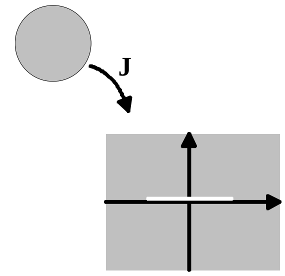
8.5.2 POISSON-Formel für den Einheitskreis

$$U(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(1-r^2\right) \cdot f(\theta)}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, d\theta$$

$$U(z) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \cdot f(\theta)\, d\theta\right)$$



8.5.3 JOUKOWSKI-Abbildung



$$J(z) = \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \tfrac{1}{2}i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

konform für $z \neq \pm 1$

$$J^{-1}(z) = z \pm \sqrt{z^2-1}$$

→ vgl. Skript zur Vorlesung Seite 18.5.E2

8.6 Integration und CAUCHY-Integralsatz

$$\int_C f\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (u\dot{x} - v\dot{y})\,dt + i\int_{t_0}^{t_1} (u\dot{y} + v\dot{x})\,dt$$

$$\int_{EK} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

EK: Einheitskreis

CAUCHY-Integralsatz

$f: D \to C$ holomorph und D einfach zusammenhängendes Gebiet

$\Rightarrow \oint_C f\,dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise glatten Wege

8.7 LAURANT-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$a_{-n} \forall n \geq N$ → Reihe nach links abbrechend → Pol N-ter Ordnung am Entwicklungspunkt

z_0 heißt **isolierte Singularität**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß f holomorph für $\{z | 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ und nicht holomorph in z_0 ist. Eine isolierte Singularität heißt **wesentlich**, wenn Sie kein Pol N-ter Ordnung ist.

8.8 Residuum

8.8.1 Definition

Ist z_0 eine isolierte Singularität und C ein Kreis um z_0, der nur die Singularität z_0 enthält, so heißt

$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f\,dz$ **Residuum** von f bei z_0.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C f\,dz = a_{-1}$$

für C Kreis um z_0

$$\Rightarrow \oint_C f\,dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{N} \operatorname{Res} f\Big|_{z_n}$$

8.8.2 Berechnung

$$a_{-1} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_r} f(z)\,dz$$

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[(z - z_0)^N \cdot f(z)\right]$$

Pol N-ter Ordnung bei z_0

8.8.3 Sätze

$$P = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \qquad Q = \sum_{m=0}^{M} a_m z^m$$

$$(1-\varepsilon)\cdot|a_n|\cdot|z|^N < |P| < (1+\varepsilon)\cdot|a_n|\cdot|z|^N \qquad \forall\varepsilon > 0 \text{ und } |z| > R(\varepsilon)$$

$$\lim_{R\to 0}\int_C \frac{P}{Q}dz = 0 \qquad \text{falls } M \geq N+2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_i > 0}\operatorname{Res}\frac{P}{Q}\bigg|_{z_i} \qquad \text{falls Grad}P \leq \text{Grad}Q - 2 \text{ und } Q(x) \neq 0 \text{ für } x \in R$$

8.9 Anwendung: LAPLACE-Transformation

$$f^*(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad p \in C$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-pt} f^*(p)dp$$

f(t) Originalfunktion $\quad$ $f^*(p)$ Bildfunktion / LAPLACE-Transformierte

→ BRONSTEIN: „Taschenbuch der Mathematik“ Seite 689 f

Faltung von f un g: $f * g = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$

$$L(f * g) = f^* \cdot g^*$$

8.10 CAUCHY-Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta\in C}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta\in C}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \qquad \to f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta\in C}\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta \qquad \to f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\zeta\in C}\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

$$\to f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\zeta\in C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

8.11 TAYLOR-Reihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-z_0)^n$$

Die Reihe ist konvergent für $|z-z_0| < R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}}$

f auf G holomorph, $z_0 \in G \to f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(z_0)\cdot(z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < r \qquad R \geq r$

Maximum von $|f(z)|$ wird ∂G eingenommen

Fundamentalsatz der Algebra

$P(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k\cdot z^k \qquad a_N \neq 0 \quad \to \quad \exists$ mindestens ein z_0 mit $P(z_0) = 0$

Identitätssatz

$f(z) = g(z)$ für $z \in C \quad \to \quad f(z) = g(z) \quad \forall\, z \in G$

Entwicklungssatz

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-z_0)^n$ $\qquad$ konvergiert für $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} < |z-z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}$

9 Anhang

9.1 Funktionen

erf

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} x$$

9.2 trigonometrische Funktionen

9.2.1 Umformungen für Winkelvielfache

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\qquad$ $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

9.2.2 Umformungen für Summen und Differenzen

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

9.2.3 Umformungen für Produkte

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

9.2.4 Umformungen für Potenzen

$$\sin^2\alpha \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2\alpha)\right] \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2\alpha)\right]$$

Weitere Umformungen → BRONSTEIN: „Taschenbuch der Mathematik“ S.65 ff

9.3 Koordinatensysteme

9.3.1 Polarkoordinaten

$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$

Flächenelement: $dF = r\, dr d\varphi$
Funktionaldeterminante: $\Delta = r$

9.3.2 Kugelkoordinaten

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\nu$
$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\nu$
$z = r \cdot \cos\nu$

Volumenelement: $dV = r^2 \cdot \sin\nu\, dr d\varphi d\nu$
Funktionaldeterminante: $\Delta = r^2 \cdot \sin\nu$

oder

$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\nu$
$y = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\nu$
$z = r \cdot \sin\nu$

Volumenelement: $dV = r^2 \cdot \cos\nu\, dr d\varphi d\nu$
Funktionaldeterminante: $\Delta = r^2 \cdot \cos\nu$

9.3.3 Zylinderkoordinaten

$x = r \cdot \cos\varphi$
$y = r \cdot \sin\varphi$
$z = z$

Volumenelement: $dV = r\, dr d\psi d\varphi$
Funktionaldeterminante: $\Delta = r$

9.4 Hauptachsentransformation

9.4.1 Kurven zweiter Ordnung

$$ax^2 + by^2 + cxy = g$$

$$\vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b \end{pmatrix}}_{A} \vec{x} = g \quad \leftrightarrow \quad \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = g$$

$\rightarrow$ Bestimmung der Eigenwerte λ_1 und λ_2

$\rightarrow$ Bestimmung der Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ $\rightarrow Y = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ $\vec{x} = Y \cdot \vec{y}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\langle Y^T A Y \vec{y}, \vec{y} \rangle = g$

$$\lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 = g$$

9.4.2 Flächen zweiter Ordnung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = g$$

$$\vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e \\ \frac{1}{2}d & b & \frac{1}{2}f \\ \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f & c \end{pmatrix}}_{A} \vec{x} = g \quad \leftrightarrow \quad \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = g$$

$\rightarrow$ Bestimmung der Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3

$\rightarrow$ Bestimmung der Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ $\rightarrow Y = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ $\vec{x} = Y \cdot \vec{y}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\langle Y^T A Y \vec{y}, \vec{y} \rangle = g$

$$\lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \lambda_3 {y_3}^2 = g$$

9.4.3 Klassifizierung

Kurve zweiter Ordnung				**Fläche zweiter Ordnung**				
λ_1	λ_2	g		λ_1	λ_2	λ_3	g	
+	+	+	Ellipse	+	+	+	+	Ellipsoid
+	+	0	Nullpunkt	+	+	+	0	Nullpunkt
+	+	-	leere Menge	+	+	+	-	leere Menge
+	-	±	Hyperbel	+	+	-	+	einschaliges Hyperboloid
+	-	0	zwei Geraden durch Nullpunkt	+	+	-	0	elliptischer Doppelkegel $\vec{v}_3$-Achse ist Kegelachse
+	0	+	zwei Geraden parallel zur $\vec{v}_2$-Achse	+	+	-	-	zweischaliges Hyperboloid
+	0	0	$\vec{v}_2$-Achse	+	+	0	+	elliptischer Zylinder
+	0	-	leere Menge	+	+	0	0	$\vec{v}_3$-Achse
				+	+	0	-	leere Menge
				+	-	0	±	hyperbolischer Zylinder
				+	-	0	0	zwei Ebenen durch die $\vec{v}_3$-Achse
				+	0	0	+	zwei Ebenen parallel zur $\vec{v}_2$-$\vec{v}_3$-Achse
				+	0	0	0	$\vec{v}_2$-$\vec{v}_3$-Ebene
				+	0	0	-	leere Menge

$+ \equiv >0$ $\qquad - \equiv <0$ $\qquad 0 \equiv =0$ $\qquad \pm \equiv \neq 0$

9.5 Sonstiges

9.5.1 Vektorprodukt

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}$$

9.5.2 GRASSMANNscher Entwicklungssatz

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$