

Formeln zur Technischen Mechanik

von Gerald Meier

1 Kinematik von Punkten und starren Körpern

1.1 Kinematik des Punktes

1.1.1 Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

1.1.2 Geschwindigkeits und Beschleunigungsvektor in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\dot{x}(t)}_{v_x} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\dot{y}(t)}_{v_y} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{\dot{z}(t)}_{v_z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\ddot{x}(t)}_{a_x} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\ddot{y}(t)}_{a_y} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{\ddot{z}(t)}_{a_z} \cdot \vec{e}_z$$

1.1.3 Sonderfall: Geradlinige Bewegung

$$r = x(t)$$

$$v = \dot{x}(t) \quad |\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$a = \ddot{x}(t) \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Gegebene Funktion	Gesuchte Funktion	
$x(t)$	$v = \frac{dx}{dt}$	$a = \frac{d^2x}{dt^2}$
$v(t)$	$x = x_0 + \int_{t_0}^t v dt$	$a = \frac{dv}{dt}$
$a(t)$	$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t a dt^2$	$v = v_0 + \int_{t_0}^t a dt$
$v(x)$	$a = v \frac{dv}{dx}$	$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v}$
$a(x)$	$v = \sqrt{2 \int_{x_0}^x a dx + v_0^2}$	$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x a dx + v_0^2}}$
$t(x)$	$v = \frac{1}{dt/dx}$	$a = \frac{1}{dt/dx} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{dt/dx} \right]$
$x(v)$	$a = \frac{v}{dx/dv}$	$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{1}{v} \cdot \frac{dx}{dv} dv$

$a(v)$	$x = x_0 + \int_{v_0}^v \frac{v dv}{a}$	$t = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{dv}{a}$
$t(v)$	$x = x_0 + \int_{v_0}^v v \cdot \frac{dt}{dv} dv$	$a = \frac{1}{dt/dv}$

1.1.4 Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \cdot \vec{e}_r & d\vec{e}_r &= d\varphi \vec{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ & & d\vec{e}_\varphi &= -d\varphi \vec{e}_r \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_r = -\dot{\varphi} \vec{e}_r \\ \vec{v} &= v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega & \ddot{\varphi} &= \dot{\omega} \end{aligned}$$

1.1.4.1 Kreisbewegung ($r=const.$)

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r \qquad \vec{v} = r\omega \vec{e}_\varphi \qquad \vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r + r\dot{\omega} \vec{e}_\varphi$$

1.1.4.2 Zentralbewegung um Ursprung ($a_r=0, r^2\omega=const.$)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \cdot \vec{e}_r + z \vec{e}_z \\ \vec{v} &= v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \\ \vec{a} &= a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.1.5 Räumliche Bewegung in natürlichen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}[s(t)] \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \vec{e}_t \\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \dot{v} \vec{e}_t + v \dot{\vec{e}}_t \end{aligned}$$

1.2 Relativkinematik des Punktes

1.2.1 Translation des Bezugssystems

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_{O'} + \vec{r}_{O'P} = \vec{r}_{O'} + \bar{x} \vec{e}_x + \bar{y} \vec{e}_y + \bar{z} \vec{e}_z \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \underbrace{\dot{\vec{r}}_{O'}}_{\vec{v}_F} + \underbrace{\dot{\vec{r}}_{O'P}}_{\vec{v}_{Rel}} = \dot{\vec{r}}_{O'} + \dot{\bar{x}} \vec{e}_x + \dot{\bar{y}} \vec{e}_y + \dot{\bar{z}} \vec{e}_z \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = \underbrace{\ddot{\vec{r}}_{O'}}_{\vec{a}_F} + \underbrace{\ddot{\vec{r}}_{O'P}}_{\vec{a}_{Rel}} = \ddot{\vec{r}}_{O'} + \ddot{\bar{x}} \vec{e}_x + \ddot{\bar{y}} \vec{e}_y + \ddot{\bar{z}} \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.2.2 Translation und Rotation des Bezugssystems

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}_{0'P} = \vec{r}_{0'} + \bar{x}\vec{e}_{\bar{x}} + \bar{y}\vec{e}_{\bar{y}} + \bar{z}\vec{e}_{\bar{z}}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{0'} + \dot{\vec{r}}_{0'P} = \dot{\vec{r}}_{0'} + \underbrace{\left(\dot{\bar{x}}\vec{e}_{\bar{x}} + \dot{\bar{y}}\vec{e}_{\bar{y}} + \dot{\bar{z}}\vec{e}_{\bar{z}}\right)}_{\left.\frac{d\vec{r}_{0'P}}{dt}\right|_{\text{Bez.}}} + \underbrace{\left(\bar{x}\dot{\vec{e}}_{\bar{x}} + \bar{y}\dot{\vec{e}}_{\bar{y}} + \bar{z}\dot{\vec{e}}_{\bar{z}}\right)}_{\vec{\omega}_F \times \vec{r}_{0'P}}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_F + \vec{v}_{\text{Rel}} \quad \text{mit} \quad \vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_F \times \vec{r}_{0'P}$$

$$\vec{v}_{\text{Rel}} = \left.\frac{d\vec{r}_{0'P}}{dt}\right|_{\text{Bez.}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}}_F \times \vec{r}_{0'P} + \vec{\omega}_F \times \left(\left.\frac{d\vec{r}_{0'P}}{dt}\right|_{\text{Bez.}} + \vec{\omega}_F \times \vec{r}_{0'P}\right) + \left(\left.\frac{d\vec{v}_{\text{Rel}}}{dt}\right|_{\text{Bez.}} + \vec{\omega}_F \times \vec{v}_{\text{Rel}}\right)$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}_0 + \vec{\omega}_F \times \vec{r}_{0'P} + \vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_{0'P})$$

$$\vec{a} = \vec{a}_F + \vec{a}_{\text{Rel}} + \vec{a}_C \quad \text{mit} \quad \vec{a}_{\text{Rel}} = \left.\frac{d\vec{v}_{\text{Rel}}}{dt}\right|_{\text{Bez.}} = \left.\frac{d^2\vec{r}_{0'P}}{dt^2}\right|_{\text{Bez.}}$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{\text{Rel}}$$

\vec{a}_C : Coriolisbeschleunigung

Ebene Bewegung

→ bewegtes Polarkoordinatensystem

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{0'} + r\omega_F \vec{e}_{\phi}$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{0'} + r\dot{\omega}_F \vec{e}_{\phi} - r\omega_F^2 \vec{e}_r$$

1.3 Kinematik des starren Körpers

1.3.1 Translation des starren Körpers

$$\vec{r}_P = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_P(t) = \dot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P(t) = \ddot{\vec{r}}_P(t) = \ddot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

1.3.2 Rotation des starren Körpers

1.3.2.1 Rotation um eine raumfeste Drehachse

$$\vec{v}_P = v_{\phi} \vec{e}_{\phi} = r\omega \vec{e}_{\phi}$$

$$\vec{a}_P = a_r \cdot \vec{e}_r + a_{\phi} \cdot \vec{e}_{\phi} = -r\omega^2 \vec{e}_r + r\dot{\omega} \vec{e}_{\phi}$$

1.3.2.2 Rotation um einen Punkt

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = (\vec{e}_{\omega} \times \vec{r}_{0'P}) \frac{d\phi}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{0'P}$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{0'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0'P})$$

1.3.3 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{0'P}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{0'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{0'P})$$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

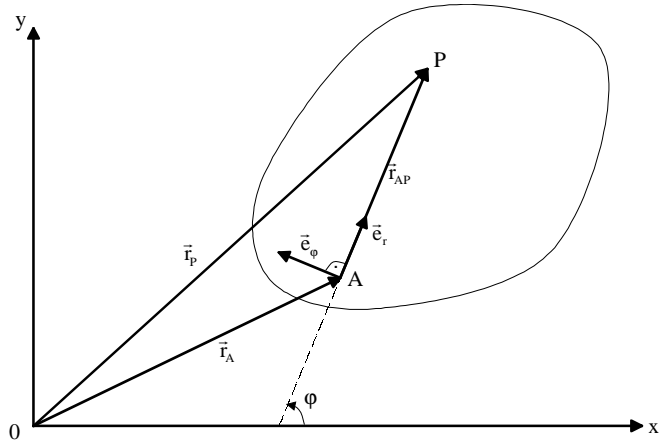
$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP})$$

1.3.4 Ebene Bewegung des starren Körpers

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP} = \vec{r}_A + r\vec{e}_r$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP} = \vec{v}_A + r\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{AP}^r + \vec{a}_{AP}^\varphi = \vec{a}_A - r\omega^2\vec{e}_r + r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$



Bei einer ebenen Bewegung des starren Körpers setzt sich die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des beliebigen körperfesten Punktes P zusammen aus der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des körperfesten Bezugspunktes A sowie der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Punktes P infolge der Drehung um A.

ist A **Momentanpol** $\rightarrow \vec{v}_A = 0$

$$\vec{r}_{AP} = r_{AP}\vec{e}_r = -\frac{v_P}{\omega}(\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi)$$

1.3.4.1 Rastpolbahn

Momentanpollagen im raumfesten Bezugssystem in Abhängigkeit von der Zeit

$$x_M = x_A - \frac{v_{Ay}}{\omega}$$

$$y_M = y_A - \frac{v_{Ax}}{\omega}$$

1.3.4.2 Gangpolbahn

Gesamtheit aller Momentanpollagen in einem körperfesten System

$$\bar{x}_M = \frac{1}{\omega}(-v_{Ay} \cos \varphi + v_{Ax} \sin \varphi)$$

$$\bar{y}_M = \frac{1}{\omega}(v_{Ay} \sin \varphi + v_{Ax} \cos \varphi)$$

Beispiel: abrollendes Rad

1.4 Relativkinematik des starren Körpers

Einführung von drei Koordinatensystemen:

- 1) raumfestes x, y, z -Koordinatensystem mit Bezugspunkt 0
- 2) bewegtes x', y', z' -Koordinatensystem mit Bezugspunkt 0' mit $\vec{v}_{0'}$, $\vec{a}_{0'}$ und $\vec{\omega}_F$ gegenüber raumfesten System.
- 3) körperfestes $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -Koordinatensystem mit Bezugspunkt A mit \vec{v}_A , \vec{a}_A und $\vec{\omega}$ gegenüber raumfesten System und $\vec{\omega}_{\text{Rel}} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_F$ gegenüber bewegten System.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{PF} + \vec{v}_{P\text{Rel}} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \vec{v}_{PF} &= \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}_F \times (\vec{r}_{0'A} + \vec{r}_{AP}) \\ \vec{v}_{P\text{Rel}} &= \vec{v}_{A\text{Rel}} + \vec{\omega}_{\text{Rel}} \times \vec{r}_{AP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_{PF} + \vec{a}_{P\text{Rel}} + \vec{a}_{PC} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \vec{a}_{PF} &= \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\omega}}_F \times (\vec{r}_{0'A} + \vec{r}_{AP}) + \vec{\omega}_F \times [\vec{\omega}_F \times (\vec{r}_{0'A} + \vec{r}_{AP})] \\ \vec{a}_{P\text{Rel}} &= \vec{a}_{A\text{Rel}} + \dot{\vec{\omega}}_{\text{Rel}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega}_{\text{Rel}} \times (\vec{\omega}_{\text{Rel}} \times \vec{r}_{AP}) \\ \vec{a}_{PC} &= 2\vec{\omega}_F \times \vec{v}_{A\text{Rel}} + 2\vec{\omega}_F \times (\vec{\omega}_{\text{Rel}} \times \vec{r}_{AP}) \end{aligned} \end{aligned}$$

2 Kinetik des Massenpunktes

2.1 Die NEWTONSchen Axiome der Mechanik

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a} \quad [\vec{F}] = \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$$

2.2 Dynamische Grundgleichung

2.2.1 Freie Bewegung

Beispiel Wurfparabel

2.2.2 Geführte Bewegung

Zwangskräfte sind Reaktionskräfte und stehen senkrecht zur Bahn.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{Z}$$

Beispiel: Fadenpendel

2.2.3 Bewegung mit Widerstandskräften

Widerstandskräfte wirken tangential zur Bahn und sind der Bewegung entgegengerichtet.

$$R = \mu \cdot N$$

(COULOMBSches Reibungsgesetz)

$$F_w = kv$$

(Strömungswiderstand bei laminarer Strömung)

$$F_w = kv^2$$

(Strömungswiderstand bei turbulenter Strömung)

$$F_w = c_w \frac{\rho}{2} Av^2$$

(Widerstandsgesetz)

A: Fläche in Strömungsrichtung

v: Anströmungsgeschwindigkeit

ρ : spezifische Masse des Fluides

c_w : sonstige Einflüsse

2.3 Arbeitssatz und Energiesatz

2.3.1 Arbeitssatz

→ zeitfreie Lösungen, Anfangs- und Endzustand als Funktion des Weges

Arbeit: $W = \int \vec{F} d\vec{r}$

Arbeitssatz: $E_{k1} - E_{k0} = W_{0-1}$

Die Arbeit, die von der an der Punktmasse eingprägten Kraft zwischen zwei Bahnpunkten verrichtet wird, ist gleich der Änderung der kinetischen Energie dieser Punktmasse.

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ $[P] = W = \frac{Nm}{s}$

Wirkungsgrad: $\eta = \frac{\text{genutzte Leistung}}{\text{zugeführte Leistung}}$

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{Z} \Rightarrow$ $m \frac{v^2}{2} = \int \vec{F} d\vec{r}$

$E_{kin} = m \frac{v^2}{2}$

Beispiel: Abrutschen eines Klotzes

2.3.2 Energiesatz

$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow$ konservatives Kraftfeld

$\vec{F} = -\text{grad}(\vec{E}_p(\vec{r}))$

$\text{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow$ das konservative Kraftfeld ist wirbelfrei

(Kraft)Potential $E_{pot}(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + C = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$

$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2} = E = \text{konst.}$

Die aus kinetischer und potentieller Energie gebildete Gesamtenergie E des Massenpunktes bleibt während einer Bewegung konstant, wenn alle eingprägten Kräfte konservativ sind.

2.3.2.1 Schwerkraftpotential

$F = mg$

$E_{pot} = mgz$

2.3.2.2 Gravitationspotential

$F = k \frac{Mm}{r^2}$

$E_{pot} = -k \frac{Mm}{r}$

2.3.2.3 Beispiel: Potential einer elastischen Feder (elastisches Potential)

$$F = cx$$

$$E_{\text{pot}} = c \frac{x^2}{2}$$

Beispiele: 1) Freier Fall ohne Luftwiderstand
2) Bewegung eines reibungsfreien mathematischen Pendels

2.4 Impuls und Stoßvorgänge

2.4.1 Impulssatz

$$m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{J}$$

| Die Änderung der Bewegungsgrößen ist gleich dem Impuls (Zeitintegral über die eingeprägte Kraft) .

2.4.2 Der zentrale Stoß zweier Punktmassen

$$\text{Impulserhaltung} \rightarrow m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

v_1, v_2 Geschwindigkeiten vor Stoß
 V_1, V_2 Geschwindigkeiten nach Stoß

2.4.2.1 Vollplastischer Stoß

$$V_1 = V_2 = V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

2.4.2.2 Vollkommen elastischer Stoß

$$E_{\text{kin, ges, vorher}} = E_{\text{kin, ges, nachher}}$$

$$V_1 = v_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$V_2 = v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

2.4.2.3 Wirkliche teilelastische Stöße

$$\text{Stoßzahl: } \varepsilon = \frac{V_2 - V_1}{v_1 - v_2}$$

$\varepsilon = 0$: vollplastischer Stoß
 $\varepsilon = 1$: vollkommen elastischer Stoß

$$V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2} - \varepsilon \right) v_1 + (1 + \varepsilon) v_2 \right]$$

$$V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left[(1 + \varepsilon) v_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} - \varepsilon \right) v_2 \right]$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - \varepsilon^2)$$

Beispiele: 1) Rücksprunghärte
2) Rückstoß beim Trennen von Massen

2.5 Momentensatz (Drehimpulssatz)

Moment: $\vec{M}_{(0)} = \vec{r} \times \vec{F}$

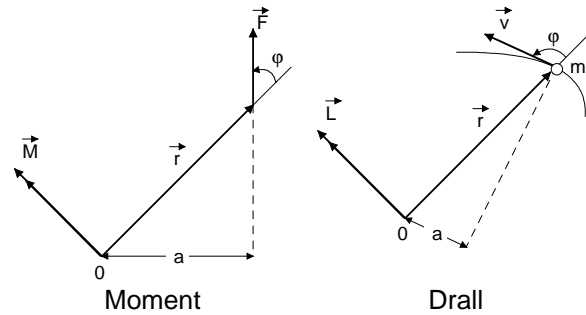
$$|\vec{M}_{(0)}| = Fr \sin \varphi = Fa$$

Drall: $\vec{L}_{(0)} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$|\vec{L}_{(0)}| = amv$$

Drallsatz: $\frac{d\vec{L}_{(0)}}{dt} = \vec{M}_{(0)}$

Die zeitliche Ableitung des Drehimpulsvektors in Bezug auf einen beliebigen raumfesten Punkt 0 ist gleich dem Moment der am Massenpunkt angreifenden eingepprägten Kraft bezüglich desselben Punktes .



Drehimpulssatz: $\vec{L}_{(0)}(t_2) - \vec{L}_{(0)}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{(0)}(t) dt$

Sonderfall: Ebene Kreisbewegung

$$L_{(0)} = mrv = mr^2\omega = J_{(0)}\omega$$

$$M_{(0)} = J_{(0)}\ddot{\varphi}$$

Beispiel: mathematisches Pendel

2.6 Trägheitskraft und D’ALEMBERTSches Prinzip

2.6.1 Formale Rückführung der Kinetik auf die Statik

D’Alembertsche Trägheitskraft: $\vec{F}_T = -m\vec{a}$

→ dynamische Grundgleichung: $\vec{F} + \vec{Z} + \vec{F}_T = 0$

Die Summe aller auf einen Massenpunkt einwirkenden Kräfte einschließlich der Trägheitskraft ist zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht .

Beispiele: 1) Freier Fall ohne Luftwiderstand

2) System von Feder und geschwindigkeitsproportionalem Dämpfer

2.6.2 D’ALEMBERTSches Prinzip (Fassung von LAGRANGE)

virtuelle Verrückung $\delta\vec{r} \perp \vec{Z} \rightarrow \vec{Z}\delta\vec{r} = 0$

Die Bewegung des Massenpunktes erfolgt so, daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte zu jedem Zeitpunkt verschwindet .

$$\Rightarrow (\vec{F} + \vec{F}_T)\delta\vec{r} = 0$$

$$\delta W + \delta W_T = 0$$

Die Bewegung des Massenpunktes erfolgt so, daß bei einer virtuellen Verrückung die Summe der virtuellen Arbeiten der eingepprägten Kräfte und der D’ALEMBERTSchen Trägheitskraft zu jedem Zeitpunkt verschwindet.

Beispiele: 1) Bewegung von Masse entlang Kurve

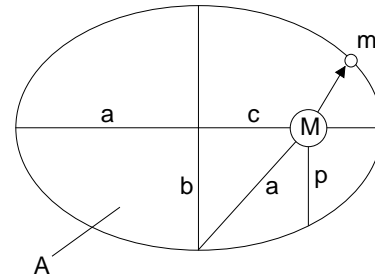
2) Ebene Bewegung eines Massepunktes bei trockener Reibung

2.7 Planeten- und Satellitenbewegung (KEPLERSche Gesetze)

$$\text{Umlaufzeit: } T = \frac{A}{C} = \frac{\pi ab}{C}$$

$$\text{Energiesatz: } E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} mv^2 - k \frac{Mm}{r} = E$$

$$\text{Drallsatz: } \frac{d\vec{L}_{(0)}}{dt} = \vec{M}_{(0)} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{(0)} = m\vec{r} \times \vec{v} = \text{konst.}$$



erstes KEPLERSches Gesetz

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

- $e = 0 \Rightarrow$ Kreis
- $e < 1 \Rightarrow$ Ellipse
- $e = 1 \Rightarrow$ Parabel
- $e > 1 \Rightarrow$ Hyperbel

| Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

zweites KEPLERSches Gesetz

$$r^2 \dot{\varphi} = 2C$$

| Planeten bewegen sich mit konstanter Flächengeschwindigkeit um die Sonne, d.h. der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

drittes KEPLERSches Gesetz

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3}{kM}$$

| Die Quadrate der Umlaufzeiten von Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Umlaufbahnen.

3 Kinetik des Massenpunktsystems

$$\text{actio} = \text{reactio } \vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

Beispiel: ATWOODSche Fallmaschine

3.1 Schwerpunktsatz

$$\text{Schwerpunkt S } \vec{r}_S = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow m \vec{r}_S = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$\text{Schwerpunktsatz } m \ddot{\vec{r}}_S = m \ddot{\vec{a}}_S = \vec{F}$$

| Der Schwerpunkt S des Massenpunktsystems bewegt sich so, als wenn die Gesamtmasse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden .

$$\dot{\vec{p}}_S = \vec{F}$$

| Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses des Massenpunktsystems ist gleich der Resultierenden aller äußeren Kräfte .

$$\text{Impulssatz } \vec{p}_S(t) - \vec{p}_S(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F} dt$$

3.2 Momentensatz (Drallsatz)

3.2.1 Raumfester Bezugspunkt

$$\text{Gesamtdrehimpuls } \vec{L}_{(0)} = \sum_i \vec{L}_{i(0)}$$

$$\text{resultierendes Moment der äußeren Kräfte } \vec{M}_{(0)} = \sum_i \vec{M}_{i(0)} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\text{Momentensatz (Drallsatz) } \dot{\vec{L}}_{(0)} = \vec{M}_{(0)}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Massenpunktsystems bezüglich des raumfesten Punktes 0 ist gleich dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte bezüglich desselben Punktes

$$\text{Drehimpulssatz } \vec{L}_{(0)}(t) - \vec{L}_{(0)}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{M}_{(0)}(t) dt$$

3.2.2 Bewegter Bezugspunkt 0'

$$\text{Momentensatz (Drallsatz) } \dot{\vec{L}}_{(0')} = \vec{M}_{(0')} + m(\vec{a}_{(0')} \times \vec{r}_{0'S})$$

$$\text{Sonderfälle: 1) } \vec{r}_{0'S} = 0 \Rightarrow \text{Bezugspunkt } 0' \equiv S$$

$$2) \vec{a}_{0'} = 0 \Rightarrow \text{Bezugspunkt } 0' \text{ nicht beschleunigt}$$

$$3) \vec{r}_{0'S} = 0 \parallel \vec{a}_{0'} \Rightarrow \text{Beschleunigungsvektor } \vec{a}_{0'} \text{ liegt auf der Verbindungslinie } \overline{0'S}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_{(0)} = \vec{M}_{(0)} \quad \dot{\vec{L}}_{(0')} \Big|_{\vec{a}_{(0')}=0} = \vec{M}_{(0')} \quad \dot{\vec{L}}_{(S)} = \vec{M}_{(S)}$$

Der für den festen Bezugspunkt 0 abgeleitete Drallsatz gilt in dieser Form auch für den *nichtbeschleunigten* bewegten Bezugspunkt 0' und gilt stets für den Schwerpunkt als Bezugspunkt, selbst wenn dieser beschleunigt ist.

3.3 Arbeits- und Energiesatz

$$\text{Arbeitssatz Massenpunktsysteme } E_{k1} - E_{k2} = W_{0-1}^{(a)} + W_{0-1}^{(i)} = W_{0-1}$$

Die Änderung der gesamten kinetischen Energie des Massenpunktsystems ist gleich der Summe der von allen äußeren und inneren Kräften geleisteten Arbeit.

$$\text{Arbeitssatz starrer Massenpunktsysteme } E_{k1} - E_{k2} = W_{0-1}^{(a)}$$

$$\text{Energiesatz konservativer Massenpunktsysteme } E_{k1} + E_{p1}^{(a)} + E_{p1}^{(i)} = E_{k0} + E_{p0}^{(a)} + E_{p0}^{(i)} = \text{const}$$

Die Summe aus kinetischer Energie und potentieller innerer und äußerer Energie eines konservativen Massenpunktsystems bleibt bei Bewegung des Systems konstant.

$$\text{Energiesatz starrer konservativer Massenpunktsysteme } E_{k1} + E_{p1}^{(a)} = E_{k0} + E_{p0}^{(a)} = \text{const}$$

Beispiel: ATWOODSche Fallmaschine

4 Kinetik des starren Körpers

4.1 Rotation um eine raumfeste Achse

4.1.1 Der Momentensatz

axiales Massenträgheitsmoment $J_{(\omega)} = \int_{(m)} r^2 dm$

→ Momentensatz (Drallsatz) $\dot{L}_{(\omega)} = J_{(\omega)} \cdot \dot{\omega} = M_{(\omega)}^{(a)}$

→ Drehimpulssatz $J_{(\omega)} \cdot \omega(t) - J_{(\omega)} \cdot \omega(t_0) = \int_{t_0}^t M_{(\omega)}^{(a)}(t^*) dt^*$

Die Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Zeitintegral über das von äußeren Kräften herrührende Moment.

Beispiel: Pirouette

4.1.2 Axiales Massenträgheitsmoment

homogene Massenverteilung $dm = \rho dV$

Massenträgheitsmoment $J_{\omega} = \rho \int_{(V)} r^2 dV$

Trägheitsradius i_{ω} : $J_{(\omega)} = m i_{\omega}^2$

Satz von STEINER

$$J_A = J_S + r_S^2 m$$

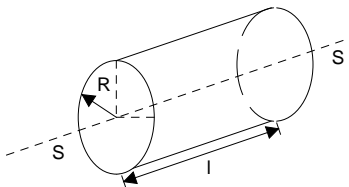
Das axiale Massenträgheitsmoment um eine zu der durch den Schwerpunkt gehenden Achse parallelen Drehachse setzt sich zusammen aus dem Massenträgheitsmoment um die durch den Schwerpunkt gehende Achse und dem Produkt Masse mal senkrechtem Abstand der beiden Achsen im Quadrat (sog. STEINERanteil).

$$J_S = m i_S^2 \rightarrow i_A^2 = i_S^2 + r_S^2$$

Beispiele:

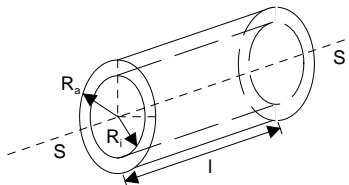
Zylinder

$$J_S = \frac{1}{2} m R^2$$



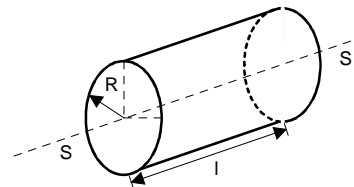
dickwandiges Rohr

$$J_S = \frac{1}{2} m (R_a^2 + R_i^2)$$



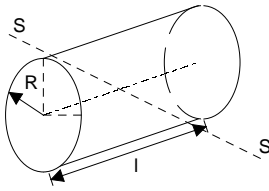
dünnwandiges Rohr

$$J_S = m R^2$$



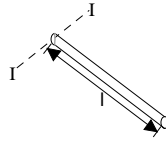
Zylinder

$$J_S = \frac{1}{4} m [R^2 + \frac{1}{3} l^2]$$



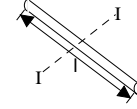
Stab (um Endpunkt)

$$J_I = \frac{1}{3} ml^2$$



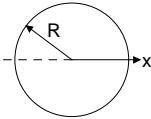
Stab (um Mittelpunkt)

$$J_S = \frac{1}{12} ml^2$$



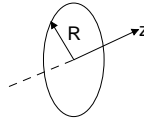
dünne Scheibe (um x)

$$J_x = \frac{1}{4} mR^2 = \frac{1}{2} J_z$$



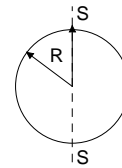
dünne Scheibe (um z)

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2$$



Kugel

$$J_S = \frac{2}{5} mR^2$$



4.1.3 Arbeit, Energie, Leistung

$$W = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M d\varphi^*$$

| Die Arbeit eines Drehmomentes M ist gleich dem Integral über Moment mal Winkelement dφ.

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} = M\dot{\varphi} = M\omega$$

| Die Leistung eines Drehmomentes ist gleich dem Moment M mal der Geschwindigkeit ω.

kinetische Energie: $E_k = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2$

Arbeitssatz: $E_{k1} - E_{k0} = W_{0-1}$

| Die Arbeit des Momentes M des Winkelweges von φ₀ nach φ₁ ist gleich der Differenz der kinetischen Energie des Körpers.

Energiesatz bei konservativem Moment $E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = \text{const}$

Zuordnung von Translation und Rotation

Geradlinige Translation des Massenpunktes		Rotation des starren Körpers um feste Achse	
Weg	s	↔	Winkel φ
Geschwindigkeit	v = ḡ	↔	Winkelgeschwindigkeit ω = φ̇
Beschleunigung	a = v̇ = ḡ̇	↔	Winkelbeschleunigung ε = ω̇ = φ̈
Masse	m	↔	Massenträgheitsmoment J _ω
Kraft	F	↔	Moment M _ω
Impuls	p = mv	↔	Drehimpuls L _ω = J _ω ω

4.1.4 Der zentrale Drehstoß

$$\text{Drehimpuls-Erhaltungssatz } J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1\Omega_1 + J_2\Omega_2$$

4.1.4.1 vollplastischer Drehstoß

$$\Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$$

4.1.4.2 vollkommen elastischer Drehstoß

$$\Rightarrow (E_{k1} + E_{k2})_{\text{vorher}} = (E_{k1} + E_{k2})_{\text{nachher}}$$

4.1.4.3 teilelastischer Drehstoß

$$\Rightarrow \text{Stoßzahl } \varepsilon = \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)}{(\omega_1 - \omega_2)}$$

4.2 Ebene Bewegung

4.2.1 Schwerpunktsatz und Momentensatz

$$\text{Schwerpunktsatz } \vec{F} = m\vec{a}_S = m\ddot{\vec{r}}_S$$

$$\text{in Komponentenform } \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}_S \\ F_y &= m\ddot{y}_S \end{aligned}$$

bewegter Bezugspunkt O'

$$\text{„Zwitter-Drallsatz“ } \dot{\vec{L}}_{(O')} = \vec{M}_{(O')} + m(\vec{a}_{O'} \times \vec{r}_{O'S}) \quad (\text{Momentensatz bez. bewegtem Punkt } O')$$

$$\text{relativer Drehimpuls } \vec{L}_{(O')} = \int_{(m)} \vec{r} \times d\vec{m}\vec{v}_{\text{rel}}$$

$$\dot{\vec{L}}_{(O')} = J_{(O')}\dot{\omega}$$

Sonderfälle: 1) O' fällt mit dem Schwerpunkt zusammen: $O' \equiv S \Rightarrow \vec{r}_{O'S} = 0$

$$\dot{\vec{L}}_{(S)} = J_S\dot{\omega} = \vec{M}_S$$

2) Bezugspunkt O' ist nicht beschleunigt: $\Rightarrow \vec{a}_{O'} = 0$

$$\dot{\vec{L}}_{(O')} = J_{(O')}\dot{\omega} = \vec{M}_{(O')}$$

3) Beschleunigungsvektor $\vec{a}_{O'}$ liegt auf der Verbindungslinie $\overline{O'S}$

$$\dot{\vec{L}}_{(O')} = J_{(O')}\dot{\omega} = \vec{M}_{(O')}$$

Beispiele: 1) Abrollen einer Walze
2) physikalisches Pendel

4.2.2 Impulssatz und Drehimpulssatz

$$\text{Impulssatz } m\dot{x}_{S1} - m\dot{x}_{S2} = \int_{t_0}^t F_x dt^*$$

$$m\dot{y}_{S1} - m\dot{y}_{S2} = \int_{t_0}^t F_y dt^*$$

$$\text{Drehimpulssatz bez. Schwerpunkt } J_S\dot{\phi}_1 - J_S\dot{\phi}_2 = \int_{t_0}^t M_S dt^*$$

Bezugspunkt O' raumfest bzw. geradlinig gleichförmig bewegt

$$J_{(O')} \dot{\Phi}_1 - J_{(O')} \dot{\Phi}_0 = \int_{t_0}^{\cdot} M_{(O')} dt^*$$

4.2.3 Kinetische Energie, Arbeitssatz und Energiesatz

kinetische Energie $E_k = \frac{1}{2} m v_{O'}^2 + \frac{1}{2} J_{O'} \omega^2 + m \vec{v}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'P})$ O' körperfester bewegter Bezugspunkt

$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2 \quad S \text{ Schwerpunkt}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_A \omega^2 \quad A \text{ körper- und raumfester Bezugspunkt}$$

Arbeitssatz: $E_{k1} - E_{k0} = W_{0-1}$

Energiesatz bei konservativem Moment $E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = \text{const}$

Beispiel: Abrollen einer homogenen Walze

4.2.4 Exzentrischer Stoß

Impulssatz $m_1 \vec{V}_{S1} - m_1 \vec{v}_{S1} = \int_{(t_s)} \vec{F}(t) dt = \vec{J}$

$$m_2 \vec{V}_{S2} - m_2 \vec{v}_{S2} = \int_{(t_s)} -\vec{F}(t) dt = -\vec{J}$$

Drehimpulssatz $J_{S1} \Omega_1 - J_{S1} \omega_{S1} = \left| \int_{(t_s)} [\vec{r}_1 \times \vec{F}(t)] dt \right| = a_1 J$

$$J_{S2} \Omega_2 - J_{S2} \omega_{S2} = \left| \int_{(t_s)} [\vec{r}_2 \times \vec{F}(t)] dt \right| = a_2 J$$

Stoßzahl $\varepsilon = \frac{V_{2n} - V_{1n}}{V_{1n} - V_{2n}}$

Beispiel: Punktmasse trifft auf Stab

4.3 Räumliche Bewegung

4.3.1 Schwerpunktsatz und Momentensatz

Zusammenfassung der äußeren Kräfte und Momente im Schwerpunkt

$$\vec{F} = \vec{e}_x F_x + \vec{e}_y F_y + \vec{e}_z F_z$$

$$\vec{M}_S = \vec{e}_x M_{Sx} + \vec{e}_y M_{Sy} + \vec{e}_z M_{Sz}$$

Schwerpunktsatz $m \ddot{\vec{r}}_S = \vec{F}$

Momentensatz *in Bezug auf körperfesten bewegten Punkt O'
in Bezug auf raum- und körperfesten Punkt A
in Bezug auf Körperschwerpunkt S*

4.3.2 Drehimpulsvektor und Trägheitstensor

$$\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega_x + \vec{e}_y \omega_y + \vec{e}_z \omega_z$$

$$\vec{r}_{0P} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

$$r_{0P}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

axiale Massenträgheitsmomente

$$J_{xx} = J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm$$

$$J_{yy} = J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm$$

$$J_{zz} = J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm$$

Massendeviationsmomente

$$J_{xy} = J_{yx} = - \int_{(m)} xy dm$$

$$J_{yz} = J_{zy} = - \int_{(m)} yz dm$$

$$J_{zx} = J_{xz} = - \int_{(m)} xz dm$$

$$J_{ij} = \int_{(m)} [r^2 \delta_{ij} - ij] dm$$

$$i, j = x, y, z$$

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Massenträgheitsmatrix

$$\underline{J}_{(0')} = [J]_{(0')} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_{(0')}$$

Drehimpulsmatrix

$$\underline{L}_{(0')} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}_{(0')}$$

Winkelgeschwindigkeitsmatrix

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{L}_{(0')} = \underline{J}_{(0')} \underline{\omega}$$

Parallelverschiebung des Bezugssystems (Satz von STEINER-HUYGENS)

$$x = x_S + \bar{x}$$

$$J_{xx} = J_{\bar{x}\bar{x}} + m(y_S^2 + z_S^2)$$

$$J_{xy} = J_{\bar{x}\bar{y}} - m x_S y_S$$

$$y = y_S + \bar{y}$$

$$J_{yy} = J_{\bar{y}\bar{y}} + m(x_S^2 + z_S^2)$$

$$J_{yz} = J_{\bar{y}\bar{z}} - m y_S z_S$$

$$z = z_S + \bar{z}$$

$$J_{zz} = J_{\bar{z}\bar{z}} + m(x_S^2 + y_S^2)$$

$$J_{zx} = J_{\bar{z}\bar{x}} - m z_S x_S$$

Dehnung des Koordinatensystems

$$J_{ij} = \int_{(m)} [r^2 \delta_{ij} - ij] dm \Rightarrow J_{\lambda\mu} = \int_{(m)} [r^2 \delta_{\lambda\mu} - \lambda\mu] dm$$

$$i, j = x, y, z$$

$$\lambda, \mu = \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$$

$$J_{\lambda\mu} = \sum_i \sum_j J_{ij} \cos(\lambda, i) \cos(\mu, j)$$

Hauptträgheitsmomente

$$J_I = J_{xx} + J_{yy} + J_{zz}$$

$$J_{II} = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xz} \\ J_{zx} & J_{zz} \end{vmatrix}$$

$$J_{III} = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}_{(0')} \Rightarrow \begin{bmatrix} J_I & 0 & 0 \\ 0 & J_{II} & 0 \\ 0 & 0 & J_{III} \end{bmatrix}_{(0')}$$

Beispiele: Hauptachsen bei Quader
Hauptachsen bei Zylinder
Hauptachsen bei dünner Scheibe

4.3.3 Kinetische Energie, Arbeitssatz und Energiesatz

kinetische Energie $E_k = \frac{1}{2} m v_{0'}^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{(0')} \vec{\omega} + m \vec{\omega} (\vec{r}_{0S} \times \vec{v}_{0'})$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \vec{L}_{(S)} \vec{\omega}$$

Bezugspunkt S Schwerpunkt

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{L}_{(A)} \vec{\omega}$$

Bezugspunkt A raum- und körperfest

Arbeitssatz: $E_{k1} - E_{k0} = W_{0-1}^{(a)}$

$W_{0-1}^{(a)}$: Arbeit durch äußere Kräfte

Energiesatz bei konservativem Momenten und Kräften $E_{k1} + E_{p1}^{(a)} = E_{k0} + E_{p0}^{(a)} = \text{const}$

4.3.4 Impuls- und Drehimpulssatz

Impulssatz $m \vec{v}(t_1) - m \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt$

Drehimpulssatz $\vec{L}_{(S)}(t_1) - \vec{L}_{(S)}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_{(S)} dt$

$$\vec{L}_{(A)}(t_1) - \vec{L}_{(A)}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_{(A)} dt$$

4.3.5 Die EULER-Gleichungen (Kreisel-Gleichungen)

$$M_I = J_I \dot{\omega}_I - (J_{II} - J_{III}) \omega_{II} \omega_{III}$$

$$M_{II} = J_{II} \dot{\omega}_{II} - (J_{III} - J_I) \omega_{III} \omega_I$$

$$M_{III} = J_{III} \dot{\omega}_{III} - (J_I - J_{II}) \omega_I \omega_{II}$$

4.3.6 Kräftefreier Kreisel

keine äußeren Momente $\vec{M}_S = 0$

$$\rightarrow \vec{L}_{(S)} = \{J_I \omega_I, J_{II} \omega_{II}, J_{III} \omega_{III}\} = \text{const.}$$

Stabilität: Einführung einer kleinen Störung $\varepsilon = \varepsilon(t)$

\rightarrow Differentialgleichung \rightarrow Lösung für $\varepsilon(t) \rightarrow$ Stabilitätsuntersuchung

Nur die momentenfreie Drehung um die Hauptachsen mit dem größten bzw. kleinsten Massenträgheitsmoment sind stabil. Die Drehung um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmomentes ist instabil.

Untersuchungen am kräftefreien Kreisel

4.3.7 Der symmetrische, nichtkräftefreie Kreisel

$$[J]_{(A)} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_{III} \end{bmatrix} \quad \vec{\omega}_F = \{\omega_{F_x}^-, \omega_{F_y}^-, \omega_{F_z}^-\} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_F + \vec{\omega}_{\text{Rel}} = \{\omega_{F_x}^-, \omega_{F_y}^-, \omega_{F_z}^- + \omega_{E_z}^-\}$$

$$\vec{\omega}_{\text{Rel}} = \{0, 0, \omega_{E_z}^-\}$$

$$\vec{M}_{(A)} = \left. \frac{d\vec{L}_{(A)}}{dt} \right|_{\text{Bez}} + \omega_F \times \vec{L}_{(A)}$$

$$M_x^- = J \dot{\omega}_{F_x}^- + [(J_{III} - J) \omega_{F_z}^- + J_{III} \omega_{E_z}^-] \omega_{F_y}^-$$

$$M_y^- = J \dot{\omega}_{F_y}^- + [(J_{III} - J) \omega_{F_z}^- + J_{III} \omega_{E_z}^-] \omega_{F_x}^-$$

$$M_z^- = J_{III} \dot{\omega}_{F_z}^-$$

Zusammenfassung

- 1) Ein nichtkräftefreier symmetrischer Kreisel führt eine reguläre Präzessionsbewegung durch, wenn auf ihn ein konstantes äußeres Präzessionsmoment $M_y = \text{konst.}$ einwirkt.
- 2) Wird dem Kreisel eine Präzessionsbewegung kinematisch aufgezwungen, so wird wegen actio = reactio vom Kreisel ein Moment

$$M_{yk} = -M_y$$

auf die Lagerung ausgeübt.

- 3) Bei der regulären Präzession des symmetrischen schweren Kreisels liegen Figurenachse, Winkelgeschwindigkeits- und Drehimpulsvektor sowie raumfeste Präzessionsachse in einer Ebene. Diese Ebene präzessiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_F$ um die raumfeste Präzessionsachse. Der Kreisel selbst dreht mit der relativen Eigenwinkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_{\text{Rel}}$ gegenüber dieser Ebene, in der auch das mitgeführte Hauptachsensystem verankert ist. Während bei kräftefreien Kreisel die Präzessionsbewegung um den raumfesten Drehimpulsvektor erfolgt, dreht sich bei der Präzession des nichtkräftefreien Kreisels auch der Drehimpulsvektor um eine raumfeste Präzessionsachse. Die Winkel zwischen den Achsen sind konstant.