V. Schwingungen

1. Freie ungedämpfte Schwingung:

Schwingungs- DGL: $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$
mit Lsg.: $\boxed{x(t) = A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t}$
mit: $A_1 = x(t=0) = x_0$

$$A_2 = \frac{\dot{x}(t=0)}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}$$

2. Freie gedämpfte Schwingung:

(1) *Schwingungsdifferentialgleichung* aufstellen: $\boxed{\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0}$

Eigenfrequenz des ungedämpften Systems: $\boxed{\omega = \sqrt{\beta}}$

(2) *Dimensionslose Zeit* $\tau = \omega t$ einführen:

=> $\dot{x} = \omega x'$

$\ddot{x} = \omega^2 x''$

in DGL: $\boxed{x'' + \frac{\alpha}{\omega}x' + x = 0}$

(3) *Lehr'sches Dämpfungsmaß D* ermitteln: $\boxed{D = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\omega}}$

(a) Starke Dämpfung D>1:

Lsg der DGL: $\boxed{x(\tau) = e^{-D\tau}\left(A_1 e^{\tau\sqrt{D^2-1}} + A_2 e^{-\tau\sqrt{D^2-1}}\right)}$

$A_1 = x(t=0) = x_0$

$$A_2 = \frac{\dot{x}(t=0)}{\omega} = \frac{v_0}{\omega}$$

(b) Aperiodischer Grenzfall D=1:

$\boxed{x(\tau) = (A_1 + A_2\tau)e^{-D\tau}}$

c) Schwache Dämpfung D<1:

$\boxed{x(\tau) = \left((A_1 + A_2)\cos\nu\tau + i((A_1 - A_2)\sin\nu\tau\right)e^{-D\tau} = Ce^{-D\tau}\cos(\nu\tau - \varphi)}$

mit $\boxed{\nu = \sqrt{1 - D^2}}$

Frequenz des gedämpften Systems: $\boxed{\omega_d = \nu\omega}$

3. Erzwungene Schwingungen

(1) Schwingungs- DGL aufstellen:

Ist Feder durch Gewicht vorgespannt ?
Ja: Vorspannungskraft cx_0 und Gewichtskraft mg fallen weg, also nicht mehr beim Freischneiden einzeichnen.
Nein: Gewichtskraft mg nicht vergessen !!

Ist φ-Abhängigkeit gesucht => mit Drehmomentgleichung lösen
Bem: Bei kleinen Auslenkungen gilt:
$\cos\varphi=1$
$\sin\varphi=\arcsin\varphi=\varphi$

Form der Erregung:
cos: E=1
(z.B. bei: $x_F = x_0 \cos\Omega t$ oder $F = F_0 \cos\Omega t$)
sin: $E = 2D\eta$
(z.B. bei: $x_D = x_0 \sin\Omega t$)

Schwingungs-DGL: $\boxed{\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = E\omega^2 x_0 \cos\Omega t}$

(2) Eigenfrequenz und Lehr'sches Dämpfungsmaß ermitteln:
Eigenfrequenz des ungedämpften Systems $\boxed{\omega = \sqrt{\beta}}$
Lehr'sches Dämpfungsmaß $\boxed{D = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\omega}}$

(3) evtl. Frequenz des gedämpften Systems:
$\boxed{\omega_d = \nu\omega}$ mit $\boxed{\nu = \sqrt{1-D^2}}$ ermitteln

(4) x_0 der Schwingungs- DGL identifizieren
rechte Seite der gefundenen DGL mit $E\omega^2 x_0 \cos\Omega t$ gleichsetzten und auflösen

(5) Übergang zur dimensionslosen Zeit
direkt einsetzten in: $\boxed{x'' + 2Dx' + x = Ex_0 \cos\eta\tau}$

(6) Auffinden der partikulären Lsg (= eingeschwingenen Zustand)
Phasen- Frequenzgang: $\boxed{\tan\varphi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}}$
Vergrößerungsfunktion: $\boxed{V = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}}$
direkt einsetzten in: $\boxed{x_p = x_0 V \cos(\eta\tau - \varphi)}$

(7) evtl. Auffinden der allgemeinen Lösung:
direkt einsetzten in: $\boxed{x_h(\tau) = e^{-D\tau}\left(A_1 e^{\tau\sqrt{D^2-1}} + A_2 e^{-\tau\sqrt{D^2-1}}\right)}$

A_1 und A_2 durch Anfangsbedingungen ermitteln.

Bem: Bei Resonanzfall, d.h. $\Omega = \omega$ bzw. $\eta = 1$

Lösen mit Hilfe von L'Hospital, d.h.: $x(\tau)\Big|_{\eta=1} = \lim \dfrac{\frac{d}{d\eta}(\text{Zähler})}{\frac{d}{d\eta}(\text{Nenner})}$