

**FORMELSAMMLUNG DER  
TECHNISCHEN  
ELEKTRODYNAMIK**

Heinz Teutsch

9. Oktober 1998

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>VEKTORANALYSIS</b> .....	<b>1</b>
Kurven-, Flächen- und Volumenelemente .....	1
Vektoranalytische Operationen .....	1
Integralsätze .....	2
Allgemeine Formeln .....	2
Umrechnungen von Einheitsvektoren .....	3
<b>LADUNG, STROM UND ELEKTROMAGNETISCHES FELD</b> ...	<b>4</b>
Coulombsches Gesetz .....	4
Ampèresches Gesetz .....	4
Kontinuitätsgleichung .....	5
Lorentzsches Kraftgesetz .....	5
$E$ und $B$ Feld gleichförmig bewegter Punktladungen .....	5
Elektromagnetische Wechselwirkung zweier bewegter Punktladungen .....	6
Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem .....	6
<b>MAXWELLSCHES GLEICHUNGEN</b> .....	<b>7</b>
Das Gesetz von Biot-Savart .....	7
Das Durchflutungsgesetz .....	8
Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung .....	9
Grenzbedingungen für $E$ und $B$ .....	9
<b>ELEKTROSTATIK</b> .....	<b>10</b>
Elektrisches Potential und elektrisches Feld .....	10
Elektrischer Dipol .....	11
Apolloniuskreisbeziehungen .....	11
Poissonsche Differentialgleichung .....	12
Energie des $E$ Feldes .....	12
<b>METALLISCHE LEITER</b> .....	<b>14</b>
Ohmsches Gesetz .....	14
Hall-Effekt .....	14
Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen .....	14
Ohmscher Widerstand .....	16
Mehrleitersysteme .....	17
<b>MAGNETOSTATIK</b> .....	<b>19</b>
Vektorpotential .....	19
Magnetischer Dipol .....	19

Selbstinduktivität .....	21
Wechselseitige Induktivitäten .....	21
<b>INDUZIERTER QUASISTATIONÄRE STRÖME .....</b>	<b>23</b>
Quasistationäre Elektrodynamik .....	23
Induzierte Schleifenströme .....	23
Energie des $\mathbf{B}$ Feldes .....	24
Bewegte Leiterschleifen .....	24
<b>ELEKTRISCH POLARISIERBARE STOFFE .....</b>	<b>26</b>
Elektrische Polarisation .....	26
Polarisationsladungen .....	26
Polarisationsstrom .....	27
Freie Ladungen und elektrische Verschiebungsdichte .....	27
Elektrische Materialgrößen .....	28
<b>MAGNETISCH POLARISIERBARE STOFFE .....</b>	<b>30</b>
Magnetische Polarisation .....	30
Magnetisierungsströme .....	30
Freie Ströme und magnetische Feldstärke .....	30
Magnetische Materialgrößen .....	31
Die Maxwell-Gleichungen mit $\mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$ .....	33
<b>ELEKTROMAGNETISCHE ENERGIEBILANZ .....</b>	<b>34</b>
Elektrische Leistungsdichte .....	34
Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika .....	34
Magnetische Leistungsdichte .....	34
Gespeicherte Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe .....	35
Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor) .....	35
<b>RETARDIERTE LÖSUNGEN DER MWG .....</b>	<b>36</b>
Allgemeine homogene Wellengleichungen .....	36
Inhomogene Wellengleichung für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ .....	36
Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale .....	36
Retardierte Potentiale .....	37
Zeitveränderlicher Dipol (Hertzscher Dipol) .....	38
Zeitveränderlicher magnetischer Dipol (Fitzgeraldscher Dipol) .....	40
Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen .....	41
<b>ANHANG: KOORDINATENSYSTEME .....</b>	<b>42</b>

## VEKTORANALYSIS

### Kurven-, Flächen- und Volumenelemente

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_{\rho} + \rho d\alpha \mathbf{e}_{\alpha} + dz \mathbf{e}_z \quad (1.53a)$$

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} + r \sin \vartheta d\alpha \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.53b)$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\alpha dz \mathbf{e}_{\rho} \quad (1.55a)$$

$$d\mathbf{a} = d\rho dz \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.55b)$$

$$d\mathbf{a} = \rho d\rho d\alpha \mathbf{e}_z \quad (1.55c)$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \mathbf{e}_r \quad (1.55d)$$

$$d\mathbf{a} = r \sin \vartheta dr d\alpha \mathbf{e}_{\vartheta} \quad (1.55e)$$

$$d\mathbf{a} = r dr d\vartheta \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.55f)$$

$$dV = \rho d\rho d\alpha dz \quad (1.54a)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha \quad (1.54b)$$

### Vektoranalytische Operationen in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.6)$$

$$\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.5, 1.7)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.12, 1.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.32, 1.33)$$

### Vektoranalytische Operationen in Zylinder- und Kugelkoordinaten

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.56a)$$

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.56b)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{\rho}) + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.57a)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] \quad (1.57b)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_{\rho} + \left[ \frac{\partial F_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_{\alpha}) - \frac{\partial F_{\rho}}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z \quad (1.58a)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\alpha} \sin \vartheta) - \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\alpha}) \right] \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\vartheta}) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.58b)$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.59a)$$

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \quad (1.59c)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_\varrho \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} G_\alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \quad (1.60a)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} G_\vartheta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} G_\alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} \quad (1.60b)$$

### Integralsätze

$$\text{Gauß : } \boxed{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV} \quad (1.14a)$$

bei mehreren nach *außen* orientierten Flächen :  $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \sum_\nu \oint_{S_\nu} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_\nu$  (1.14b)

Gauß für Gradienten :  $\iiint (\operatorname{grad} U) dV = \oint U d\mathbf{a}$  (1.27)

$$\text{Stokes : } \boxed{\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}} \quad (1.35a)$$

bei mehreren *rechtshändig* orientierten Kurven :  $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_\nu \oint_{K_\nu} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_\nu$  (1.35b)

$$\text{Green (Spezialfall 1) : } \boxed{\oint_S (\nabla U) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G (\nabla^2 U) dV} \quad (1.25)$$

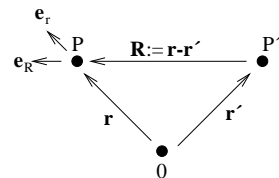
$$\text{Green (Spezialfall 2) : } \boxed{\oint_S (U \nabla U) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G (U \nabla^2 U + (\nabla U)^2) dV} \quad (1.26)$$

Weiterer Integralsatz :  $\oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{a} = - \iiint_G \operatorname{rot} \mathbf{F} dV$  (1.41)

### Allgemeine Formeln

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \mathbf{0}} \quad (1.38)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0} \quad (1.40)$$



$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.63)$$

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{grad} U_2 + U_2 \text{grad} U_1 \quad (1.36a)$$

$$\text{div}(U \mathbf{F}) = U \text{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad} U \quad (1.36b)$$

$$\text{div}(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_2 \quad (1.36c)$$

$$\text{rot}(U \mathbf{F}) = U \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{grad} U \quad (1.36d)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{F}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{F}) \quad (1.36e)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)U = \mathbf{G} \cdot \text{grad} U \quad (1.36f)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = G_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \quad (1.36g)$$

$$2(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{F} \text{div} \mathbf{G} + \mathbf{G} \text{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{F} \quad (1.36h)$$

$$\text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{F} \quad (1.36i)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)U \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \text{grad} U) + U(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} \quad (1.36j)$$

$$\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \text{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{div} \mathbf{F} \quad (1.36k)$$

### Umrechnungen von Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_\varrho = \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_x)}_{\cos \alpha} \mathbf{e}_x + \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_y)}_{\sin \alpha} \mathbf{e}_y + \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_z)}_0 \mathbf{e}_z = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y \quad (1.51a)$$

$$\mathbf{e}_r = \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varrho)}_{\sin \vartheta} \mathbf{e}_\varrho + \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\alpha)}_0 \mathbf{e}_\alpha + \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_z)}_{\cos \vartheta} \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \mathbf{e}_\varrho + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \quad (1.51b)$$

$$\mathbf{e}_x = \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\varrho)}_{\cos \alpha} \mathbf{e}_\varrho + \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\alpha)}_{-\sin \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z)}_0 \mathbf{e}_z = \cos \alpha \mathbf{e}_\varrho - \sin \alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (\text{A } 40)$$

$$\mathbf{e}_z = \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_r)}_{\cos \vartheta} \mathbf{e}_r + \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\vartheta)}_{-\sin \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\alpha)}_0 \mathbf{e}_\alpha = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \quad (\text{A } 46)$$

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varrho = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \quad (1.51c)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_r = \cos \vartheta \mathbf{e}_\varrho - \sin \vartheta \mathbf{e}_z = \cos \vartheta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) - \sin \vartheta \mathbf{e}_z \quad (1.51d)$$

$$\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta$$

$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_\alpha = \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_r \stackrel{(1.51b)}{=} \mathbf{e}_x [\sin \vartheta \mathbf{e}_\varrho + \cos \vartheta \mathbf{e}_z] \stackrel{(1.51a)}{=} \sin \vartheta \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \alpha$$

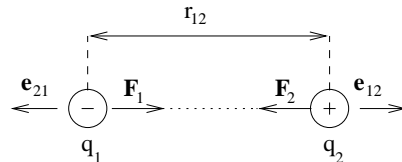
$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \sin \alpha$$

### Nützliche Integralbeziehungen

$$\frac{d}{dx} \int_a^{b(x)} f(x, u) du = \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} du + f(x, b) \frac{db}{dx} \quad (11.61)$$

## LADUNG, STROM UND ELEKTROMAGNETISCHES FELD

Coulombsches Gesetz (nur für ruhende Ladungen!)



$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_2 \quad (2.5a,b)$$

Feldliniengleichung

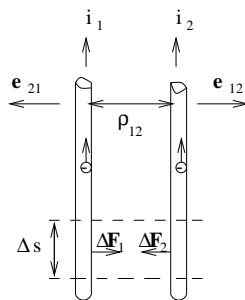
$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Ladung

$$Q = \begin{cases} \iiint_G \varrho \, dV \\ \iint_S \sigma \, da \\ \int_K \tau \, ds \end{cases} \quad (2.6b, 2.7b, 2.8b)$$

Kraft einer Linienladung auf eine Punktladung :  $\mathbf{F}_q = q \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \varrho} \mathbf{e}_\varrho$  (2.9)

Ampèresches Gesetz



$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{F}_1}{\Delta s} &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi \varrho_{12}} \mathbf{e}_{21} \\ \Delta \mathbf{F}_2 &= -\Delta \mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

---

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

### Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\dot{I} \quad (\dot{I} : \text{Gesamtstromstärke durch Hüllfläche}) \quad (2.22)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (2.23)$$

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} ds + \sum(-i_\nu) = -\dot{Q} = \dot{I} \quad (\text{A 8})$$

$$\text{mit } \mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} = \sigma \mathbf{u} \quad \text{und} \quad i = \tau \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_u \quad (2.11b, 2.15)$$

$$\text{Für dünne Drähte (in z-Richtung) gilt : } \frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (\text{Bsp. 2.3.1a})$$

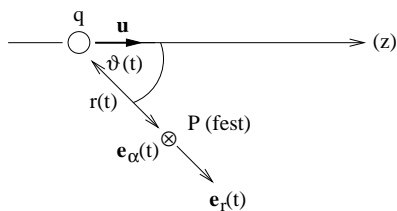
### Lorentzsches Kraftgesetz

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (2.24)$$

Bei z.B. zwei Ladungen gilt :  $\mathbf{F}_1 = q_1(\mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}^{(2)})$

Dabei bedeutet <sup>(2)</sup> das jeweilige Feld von Ladung 2 am Ort der Ladung 1 gemessen.

### $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ Feld gleichförmig bewegter Punktladungen



$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{e}_r} \quad (2.25)$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{u} \times \mathbf{e}_r} \quad (2.26)$$

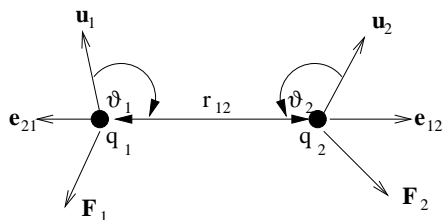
$$\text{mit } \mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{0}} \quad (2.27)$$

$$\text{mit } |\mathbf{u}| \ll c_0 \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \mathbf{u} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 q u_z \sin \vartheta}{4\pi r^2} \mathbf{e}_\alpha} \quad (2.28)$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}} \quad (2.29)$$



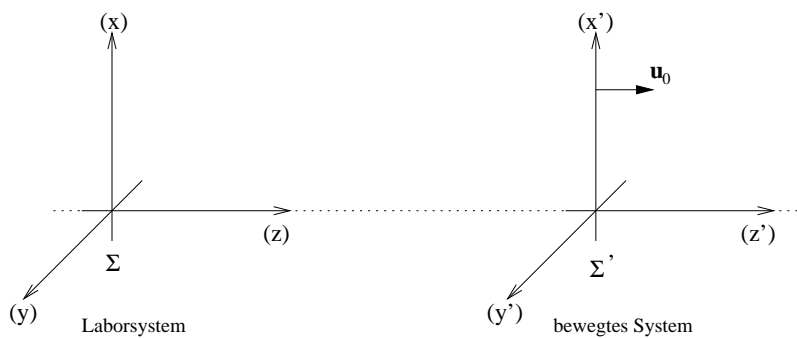
## Elektromagnetische Wechselwirkung zweier bewegter Punktladungen



$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \frac{1 - \frac{u_2^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta_2}} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{21} + \mu_0 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{e}_{21}) \right] \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \frac{1 - \frac{u_1^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta_1}} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{12} + \mu_0 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_{12}) \right] \quad (2.30b)$$

## Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem



Für  $\frac{u_0^2}{c_0^2} \ll 1$  gilt :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B} \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u}_0 \times \mathbf{E} \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp} \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{J}'_{\parallel} = (\mathbf{J}_{\parallel} - \rho \mathbf{u}_0) \quad (2.36b)$$

$$\rho' = \rho - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{J} \quad (2.36c)$$

## MAXWELLSCHE GLEICHUNGEN

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}} \quad (3.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)} \quad (3.2)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0} \quad (3.3)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]} \quad (3.4)$$

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_G \varrho(\mathbf{r}, t) dV = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (3.41)$$

$$\oint_K \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = -\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}})(t) \quad (3.42)$$

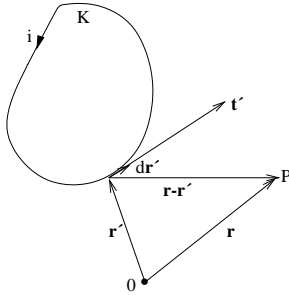
$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.43)$$

$$\oint_K \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left[ \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \right] = \mu_0 \left[ I(t) + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \right] \quad (3.44)$$

### Die Quellen von $\mathbf{E}$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & \text{wenn } S \text{ die Punktladung einschließt} \\ 0, & \text{wenn } S \text{ die Punktladung nicht einschließt} \end{cases} \quad (3.5a, 3.5b)$$

### Das Gesetz von Biot-Savart



$$\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_K \frac{i d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.10b)$$

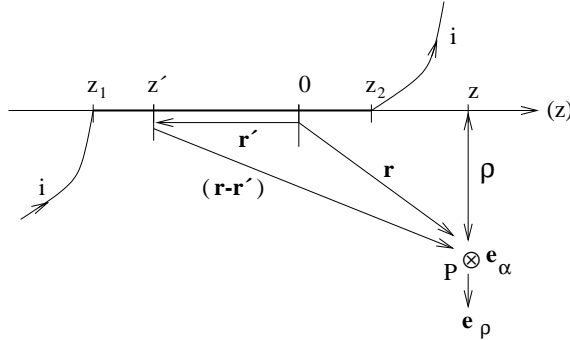
$$\mathbf{B}^{(K)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K} da' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B}^{(J)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_G \frac{\mathbf{J} dV' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}^{(i)} + \mathbf{B}^{(K)} + \mathbf{B}^{(J)}$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Anwendung: Linienstrom



Es gilt :  $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho$  ,  $\mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z$  ,  $d\mathbf{r}' = dz'\mathbf{e}_z$

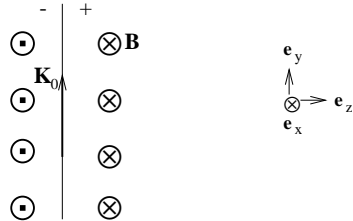
$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{B}(P) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz' \mathbf{e}_z \times [(z-z')\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho]}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \rho \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}^3} \mathbf{e}_\alpha = \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[ \frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \rho^2}} \right] \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Feld eines geraden Linienstroms ( $z_1 \rightarrow \leftrightarrow\infty$ ,  $z_2 \rightarrow +\infty$ ):  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha$  (3.11b)

Feld einer torusförmigen Spule ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  außen) :  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha$  (innen) (Bsp. 6.4.2)

Feld einer unendlich langen Zylinderspule:  $\mathbf{B}(0, 0, z) = \mu_0 K_\alpha \mathbf{e}_z$  (A 13)

Feld einer unendlich ausgedehnten Ebene  $\perp z$ -Achse :  $\mathbf{B} = \pm \frac{\mu_0 K_0}{2} \mathbf{e}_x$  (3.45)



Kraft auf ein Stromelement:  $d\mathbf{F} = \begin{cases} i d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{K} da \times \mathbf{B} \\ \mathbf{J} dV \times \mathbf{B} \end{cases} \quad (A 15)$

### Das Durchflutungsgesetz

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \mu_0 \sum i_\nu, \text{ wobei die } i_\nu \text{ im Rechtsschraubensinn von } \mathbf{K} \text{ umfaßt werden} \\ 0, \text{ wenn } \mathbf{K} \text{ keinen Strom umfaßt} \end{cases} \quad (3.23, 3.24)$$

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I = \mu_0 \left( \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \iint_S \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{a} \right) = \mu_0 (I_D + I_{\text{versch}}) \quad (3.25, 3.29)$$

Feld im Inneren einer Zylinderspule (Länge  $l$ ) :  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N i}{l} \mathbf{e}_z$  (A 93)

## Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.32)$$

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \dot{\Phi}^{(\mathbf{u})} = \iint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{a} - \oint_K (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.33, 3.34)$$

Achtung: In die integrale Form des Induktionsgesetzes (3.42) geht nur  $\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})}$  ein !!

Im Gleichstromfall gilt:  $\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} \equiv 0$

## Grenzbedingungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{E} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{pol}} + \sigma_f}{\epsilon_0}} \quad (3.65)$$

In Worten: Die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  an einer geladenen Fläche ist unstetig und springt um  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , wenn man von der negativen zur positiven Seite hindurchtritt.

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{E} := \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \mathbf{0}} \quad (3.66)$$

In Worten: Alle Tangentialkomponenten von  $\mathbf{E}$  bzgl. einer Fläche sind dort stetig.

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{B} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0} \quad (3.67)$$

In Worten: Die Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  ist an allen Grenzflächen und unter allen Umständen stetig.

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{B} := \mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K} = \mu_0 (\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_{\text{mag}})} \quad (3.68)$$

In Worten: Die zum Flächenstrom senkrechte Tangentialkomponente von  $\mathbf{B}$  ist unstetig an strombelegten Flächen, die parallele Tangentialkomponente dagegen stetig.

Grenzbedingung der Kontinuitätsgleichung:  $\boxed{\text{Div } \mathbf{J} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = -\dot{\sigma}}$  (3.69)

Merke : **Berechnung eines Feldes entweder über die integralen MWG**

**(im symmetrischen Fall anwenden) oder über die differentiellen**

**MWG+Grenzbedingungen**

# ELEKTROSTATIK

## Die MWG in der Elektrostatik

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} = \frac{\varrho_{\text{frei}} + \varrho_{\text{pol}}}{\epsilon_0}} \quad (4.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}} \quad (4.2)$$

## Elektrisches Potential und elektrisches Feld

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi} \quad (4.3)$$

$\varphi$  existiert, da Gl. (4.2) im ganzen (einfach zusammenhängenden) Raum gelten soll.

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

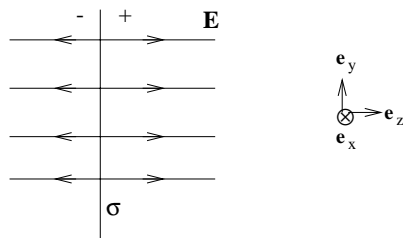
$$\text{Punktladungspotential für } r_0 \rightarrow \infty : \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.7b)$$

$$\text{Potential einer Linienladung } \tau : \varphi(\varrho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varrho_0}{\varrho} \quad (4.8)$$

$$\text{Feld einer Linienladung : } \mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \varrho} \mathbf{e}_\varrho \quad (4.9)$$

$$\text{Potential einer geladenen Ebene } \perp z\text{-Achse : } \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-|z|) \quad (A 29)$$

$$\text{Feld einer unendlich ausgedehnten, geladenen Ebene } \perp z\text{-Achse : } \mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad (3.70)$$



$$\text{Potential einer homogen geladenen Kugel : } \varphi = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) , & r < R \\ \frac{\varrho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} , & r > R \end{cases} \quad (4.26a,b)$$

$$\text{mit : } Q_0 = \varrho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$$

## Grenzbedingungen des elektrischen Potentials

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot ((\nabla \varphi)^+ - (\nabla \varphi)^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (4.5)$$

$(\nabla \varphi)^{\pm}$  heißt: zuerst den Gradienten bilden und dann z.B.  $r=R$  einsetzen.

$$\text{Potential ist stetig: } \boxed{\varphi^+ = \varphi^-} \quad (4.6)$$

## Elektrischer Dipol

Dipolmoment (zeigt von neg. zur pos. Ladung) :  $\mathbf{p} = q \mathbf{l}$  (4.12)

Potential eines Dipols (Näherung) :  $\varphi(P) = \frac{q \mathbf{l} \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (4.13)

Übergang zum Punktdipol :  $l \rightarrow 0$  ,  $\mathbf{p} = q \mathbf{l} = \mathbf{const.}$  (4.14)

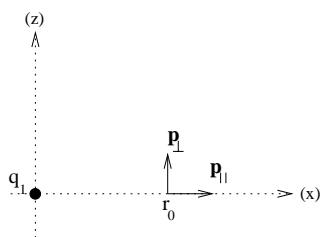
Potential eines *Punktdipols* (exakt) :  $\varphi(P) = \frac{q \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (4.13)

Feld eines Punktdipols :  $\mathbf{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$  (4.15)

Kraft auf *Punktdipol* im *externen E Feld* :  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$  (4.17)

(Berechnung der Kraft in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten  $\rightarrow$  Gl. (1.60))

Im statischen Fall (rot  $\mathbf{E} = 0$ ) gilt :  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} \Big|_{r=r_0} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Big|_{r=r_0}$  (A 32)

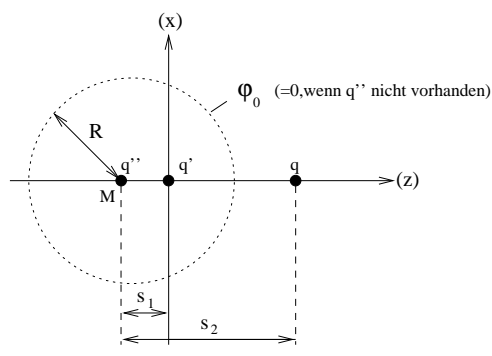


$\mathbf{F}$ (auf  $\mathbf{p}_{||}$ ) =  $-\frac{q_1 \mathbf{p}_{||}}{2\pi\epsilon_0 r_0^3}$  oder  $\mathbf{F}$ (auf  $\mathbf{p}_{\perp}$ ) =  $\frac{q_1 \mathbf{p}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$  (A 32)

Drehmoment auf Punktdipol im *externen Feld* :  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$  (4.18)

## Apolloniuskreisbeziehungen (vgl. A 28)

Alle Punkte mit gleichem Abstandsverhältnis (Äquipotentialfläche) bezüglich zweier fest vorgegebener Punkte (Ladungen) liegen auf einem Apolloniuskreis ( $\rightarrow \varphi_0 = 0$ ).



Es gilt :  $s_1 s_2 = R^2$   $q' = -\frac{R}{s_2} q$   $q = -\frac{R}{s_1} q'$   $q'' = 4\pi\epsilon_0 R \varphi_0$

### Poissonsche Differentialgleichung

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (4.25)$$

Laplace-Gleichung :  $\Delta \varphi = 0$

Lösung der Poisson-Gleichung für eine im Endlichen liegende Ladungsverteilung :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (4.31)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad (4.32)$$

Eine Lösung der Poisson-Gleichung, die eine der vier folgenden Randbedingungen erfüllt ist bis auf eine additive Konstante eindeutig ( $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  seien zwei Lösungen der Poisson-Gleichung in einem Gebiet  $G$  mit der Randfläche  $S$ ) :

(a) (Dirichletsche Randbedingung). Das Potential ist auf der Randfläche  $S$  vorgeschrieben:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

(b) (Neumannsche Randbedingung). Die Normalkomponente des Potentialgradienten ist vorgeschrieben:  $\nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} da = \nabla \varphi_2 \cdot \mathbf{n} da$  (falls  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \rightarrow E_r = 0$ ).

(c) Das Potential soll einen beliebigen, aber konstanten Wert auf  $S$  und das über  $S$  erstreckte Hüllenintegral des Potentialgradienten einen vorgeschriebenen Wert besitzen:

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = \text{const und } \oint_S (\nabla \varphi_1 \Leftrightarrow \nabla \varphi_2) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (\text{falls } \oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \rightarrow E_\vartheta = 0).$$

(d) Fläche  $S$  sei Fernkugel. Das Potential soll dort mindestens mit  $1/r$  abnehmen. Also nimmt dort  $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$  mindestens mit  $1/r^2$  ab.

### Energie des $\mathbf{E}$ Feldes

$$A_a = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N q_\nu \varphi_\nu \quad (4.47)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_G \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \iint_S \varphi \sigma da \quad (4.51)$$

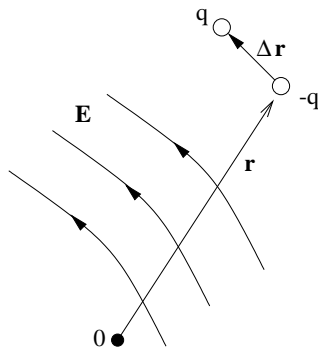
dabei ist  $\varphi$  das von *sämtlichen* Ladungen erzeugte Potential.

$$\text{Räumliche Energiedichte : } w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (4.53)$$

$$\rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Raum}} \mathbf{E}^2 dV \quad (4.55)$$

### Potentielle Energie eines Dipols (A 35)

$W_{\text{pot}}$  : von äußeren Kräften aufzuwendene Arbeit, um aktuelle Konfiguration zu erhalten (im statischen Feld gilt Kräftegleichgewicht:  $\mathbf{F}_a \stackrel{!}{=} \mathbf{F}_{el}$ ).



$$\mathbf{p} = q \Delta \mathbf{r}$$

$$W_{\text{pot}} = A_a \stackrel{!}{=} \left[ q \int_{-\infty}^{r+\Delta \mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' + (-q) \int_{-\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' \right] = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Das Minuszeichen kommt daher, daß im elektrostatischen Fall die äußere Kraft und die Kraft im  $\mathbf{E}$  Feld ( $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ ) *entgegengesetzt gleich* sein müssen.



## METALLISCHE LEITER

### Ohmsches Gesetz

$$\text{Ohmsches Gesetz : } \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (5.5)$$

Allgemeines Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter bei Anwesenheit eines äußeren  $\mathbf{B}$  Feldes :

$$\boxed{\mathbf{J} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (5.6)$$

### Hall-Effekt

$$\text{Driftgeschwindigkeit von Elektronen : } \mathbf{u}_D = \frac{b}{e} \mathbf{F} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} - b(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \kappa(\mathbf{E} + R_H \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (5.7, 5.10)$$

$$\mathbf{J}^2 = \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ , wenn } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{J} \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{b}{\kappa} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{Hall-Feld}) \quad (5.9b)$$

$$\tan \beta_H = \frac{|\mathbf{E}_{\perp}|}{|\mathbf{E}_{\parallel}|} = b |B_z| \quad (5.11b)$$

Dabei bezeichnet  $\beta_H$  den Hallwinkel ( $\beta_H = \sphericalangle(\mathbf{J}, \mathbf{E})$ )

### Joulesche Wärme

$$\text{Räumliche Leistungsdichte : } p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (5.13)$$

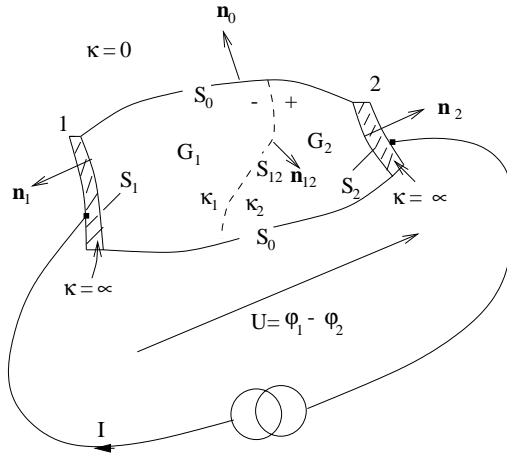
$$\text{Im Falle eines ohmschen Leiters : } p = \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 \quad (5.14)$$

### Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen

$$\text{D.h. aus Gl. (2.23) folgt : } \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (5.15)$$

$$\text{In den Bereichen konstanter Leitfähigkeit gilt : } \boxed{\nabla^2 \varphi = 0} \quad (5.17)$$

Gl. (5.17) ist eine Laplacegleichung mit folgenden Rand- sowie Grenzbedingungen:



$$\varphi = \text{const. (auf } S_1 \text{ bzw. } S_2) \quad \text{und} \quad (5.18a)$$

$$\iint_{S_1} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_1 \, da_1 = \frac{I}{\kappa_1} \quad \text{oder} \quad (5.18b)$$

$$\iint_{S_2} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_2 \, da_2 = -\frac{I}{\kappa_2} \quad (5.18c)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\kappa_1 (\nabla \varphi)^- - \kappa_2 (\nabla \varphi)^+) = 0 \quad (\text{überall auf } S_{12}) \quad (5.19)$$

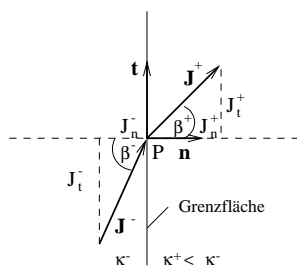
$$\mathbf{n}_0 \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (\text{überall auf } S_0) \quad (5.20)$$

$$\varphi^+ = \varphi^- \quad (\text{überall auf } S_{12}) \quad (5.21)$$

Anstelle von  $I$  hätte man auch  $U$  vorgeben können; dann werden Gl. (5.18a,b)

ersetzt durch :  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$

### Grenzflächen zwischen Bereichen verschiedener Leitfähigkeit



$$\tan \beta^+ = \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \tan \beta^- \quad (5.24)$$

$$\text{Div } \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = \mathbf{n} \cdot (\kappa^+ \mathbf{E}^+ - \kappa^- \mathbf{E}^-) \stackrel{(3.69)}{=} \dot{\sigma} \stackrel{\text{hier}}{=} 0 \quad (5.22)$$

In Worten: Die Normalkomponente *stationärer* Stromdichten ist an Grenzflächen stetig, während die Normalkomponente von  $\mathbf{E}$  für  $\kappa^- \neq \kappa^+$  unstetig ist.

$$\mathbf{t} \cdot \left( \frac{1}{\kappa^+} \mathbf{J}^+ - \frac{1}{\kappa^-} \mathbf{J}^- \right) = 0 \quad (5.23)$$

In Worten: Die Tangentialkomponenten sind unstetig, wenn die Leitfähigkeiten auf der positiven bzw. negativen Seite der Grenzfläche verschieden sind.

Bemerkung: Jeder Homogenitätsbereich von  $\kappa$  ist ladungsfrei!

### Ohmscher Widerstand

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = RI \quad (5.33)$$

$$P = \iiint^{(1)} \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 dV = \iiint \kappa (\nabla \varphi)^2 dV = UI = RI^2 \quad (5.34)$$

$$\text{Widerstand eines homogenen zylindrischen Leiters : } R = \frac{l}{\kappa a} \quad (5.35)$$

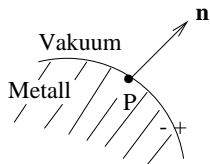
### Stromlose ruhende Metallkörper

$$\text{In stromlosen, ruhenden Metallkörpern gilt : } \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(q)} + \mathbf{E}^{(\sigma)} = \mathbf{0} \quad (5.37, 5.38)$$

wobei  $\sigma$  die durch Influenz entstandene Flächenladung angibt.

→ stromlose ruhende Metallkörper und ibs. ihre Oberflächen sind Orte konstanten Potentials.

### Grenzbedingungen an Metalloberflächen

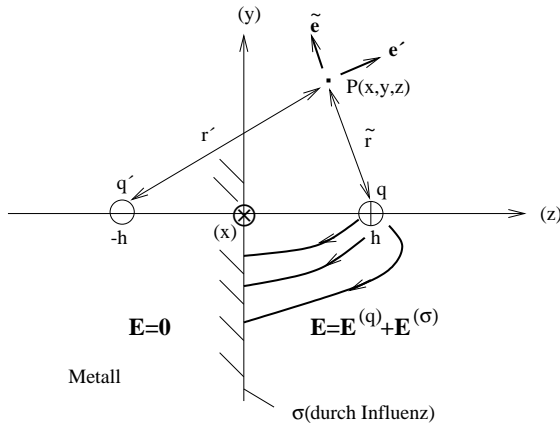


$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \mathbf{n}(P) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{E}^-(P) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}^+(P) = \mathbf{0}$$

Fiktive (virtuelle) Spiegelladung (Bsp. 5.2.2a, S173f)



$$\mathbf{E}^{(q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tilde{\mathbf{e}} \quad (\text{im ganzen Raum})$$

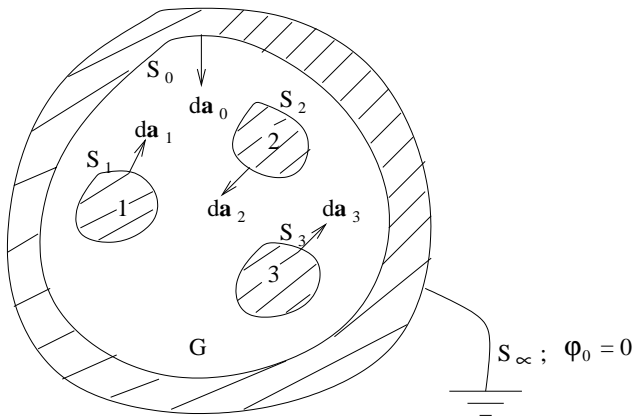
$$\mathbf{E}^{(\sigma)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \tilde{\mathbf{e}} \quad (\text{für } z < 0)$$

$$\mathbf{E}^{(\sigma)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}' \quad (\text{für } z > 0)$$

Die Influenzladungen rufen also eine Feldverteilung hervor, die im rechten Halbraum so aussieht, als ob sie von einer Punktladung  $-q$  am Ort  $q'$  herkäme.

Mehrleitersysteme

Def.: Isolierte Metallkörper, die sich durch Influenz beeinflussen.



$$Q_\nu = -\epsilon_0 \oint_{S_\nu} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{a}_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.44)$$

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) \quad : \leftrightarrow \text{ Kondensatorbetrieb} \quad (5.45)$$

$$\text{Potentialkoeffizienten : } \varphi_\nu = \sum_{\mu=1}^3 p_{\mu\nu} Q_\mu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.46)$$

$$\text{mit : } p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu} \quad (5.53)$$

$$\text{Kapazitätskoeffizienten : } Q_\nu = \sum_{\mu=1}^3 c_{\mu\nu} \varphi_\mu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.47)$$

$$\text{mit : } c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} \quad (5.54)$$

$$\text{weitere Eigenschaften : } c_{\nu\nu} > 0, \quad c_{\mu\nu} < 0, \quad \sum_{\nu} c_{\nu\mu} > 0 \quad (5.56a-c)$$

Durch Inversion der Kapazitätskoeffizienten erhält man die Potentialkoeffizienten.

Speziell für ein Zweileitersystem gelten folgende Beziehungen :

$$p_{\mu\nu} > 0 \quad \forall \mu, \nu \quad \text{und} \quad p_{\nu\nu} > p_{\mu\nu} \quad \forall \mu \neq \nu \quad (5.62)$$

$$\text{Plattenkondensator : } C = \epsilon_0 \frac{a}{d} \quad (5.67)$$

$$\text{Kugelkondensator : } C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_i}{r_a - r_i} \quad (5.68)$$

### Teilkapazitäten eines Mehrleitersystems

$$C_{\nu\nu} := \sum_{\mu} c_{\nu\mu} \quad (5.69a)$$

$$C_{\nu\mu} := -c_{\nu\mu} \quad \text{falls } \nu \neq \mu \quad (5.69b)$$

$$Q_1 = C_{11} U_{10} + C_{12} U_{12} + C_{13} U_{13} \quad (5.70a)$$

$$Q_2 = C_{21} U_{21} + C_{22} U_{20} + C_{23} U_{23} \quad (5.70b)$$

$$Q_3 = C_{31} U_{31} + C_{32} U_{32} + C_{33} U_{30} \quad (5.70c)$$

Wobei  $U_{\nu\mu} = \varphi_\nu \leftrightarrow \varphi_\mu$  ( $\nu = 1, 2, 3; \mu = 0, 1, 2, 3$ ) die Spannungen zwischen den Leitern bzw. zwischen diesen und der umhüllenden Metallwand sind.

$$\text{Kapazität eines kurzgeschl. Zweileiters gegen Fernkugel : } C = c_{11} + c_{22} + 2c_{12} \quad (A 51)$$

$$\text{Kapazität des Zweileitersystems im Kondensatorbetrieb : } \tilde{C} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \quad (A 51)$$

### Energie eines Mehrleitersystems

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_G \mathbf{E}^2 dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S \varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} [\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3 - \varphi_0 (Q_1 + Q_2 + Q_3)] \\ &= \frac{1}{2} [Q_1 (\varphi_1 - \varphi_0) + Q_2 (\varphi_2 - \varphi_0) + Q_3 (\varphi_3 - \varphi_0)] \\ &= \frac{1}{2} (Q_1 U_{10} + Q_2 U_{20} + Q_3 U_{30}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\text{Energie im Kondensator : } W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.66)$$

## MAGNETOSTATIK

Die MWG in der Magnetostatik

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad (6.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (6.2)$$

Vektorpotential

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}} \quad (6.3a)$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.3b)$$

Der Einfachheit halber setzt man :  $\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A} = 0}$  (6.4)

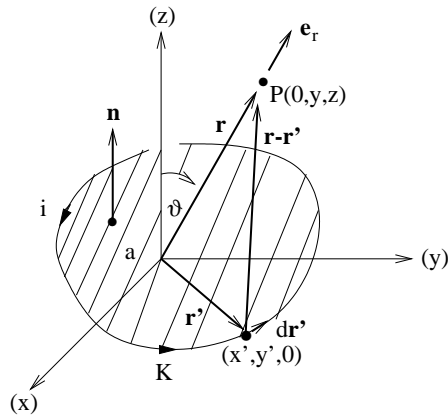
DGL für das Vektorpotential :  $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$  (6.7)

Lösung der DGL für eine im Endlichen liegende Stromverteilung :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} da' \\ \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{cases} \quad (6.10, 6.12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \operatorname{rot} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad (6.14)$$

Magnetischer Dipol



Dipolmoment ( $\mathbf{n}$  rechtshändig zu  $i$  orientiert):  $\boxed{\mathbf{m} = i a \mathbf{n}}$  (6.21)

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Potential eines Dipols (Näherung):  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_\alpha$  (6.19)

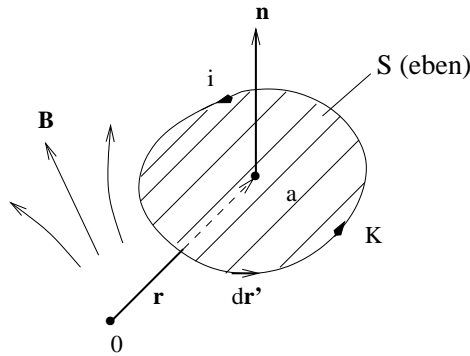
Feld eines Dipols (Näherung) :  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$  (6.20)

Übergang zum Punktdipol :  $a \rightarrow 0$  ,  $\mathbf{m} = i a \mathbf{n} = \text{const.}$  (6.22)

Potential eines *Punktdipols* (exakt):  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_\alpha$  (6.23)

Feld eines Punktdipols (exakt) :  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$  (6.24)

Kraft auf magnetischen Dipol im äußeren Feld



$\mathbf{F} = i \oint (d\mathbf{r}' \times \mathbf{B})$  (6.27)

$\mathbf{F} = \nabla^K (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$  (6.28)

Bei der Auswertung der Formel ist zu beachten, daß  $\mathbf{m}$  eine Konstante und der Gradient der Ortsfunktion  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$  an der Stelle des Dipols zu nehmen ist.

Bei statischen Magnetfeldern ( $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ ) gilt :  $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  (6.30)

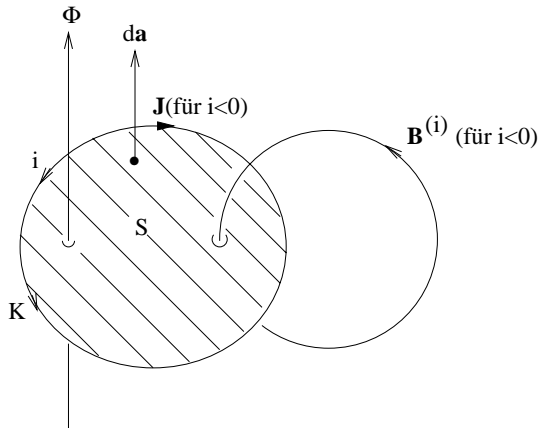
Für  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}(P_0)$  folgt :  $\mathbf{F} = \pm |\mathbf{m}| (\nabla |\mathbf{B}|) \Big|_{P_0}$  („-“ für  $\mathbf{m} \updownarrow \mathbf{B}(P_0)$ ) (6.31)

Drehmoment :  $\mathbf{T} = \oint \mathbf{r} \times (i d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = i (\oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{r} - \oint (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{B})$  (A 53)

Für ebene Stromschleifen gilt ( $\mathbf{B}^{(\text{ext})}$  homogen) :  $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}^{(\text{ext})} = \overset{!}{=} \mathbf{T}_a$  (A 53)

Achtung: Kraft und Drehmoment auf Stromschleifen im *eigenen*  $\mathbf{B}$  Feld ist  $\mathbf{0}$  !

## Selbstinduktivität



Achtung:  $\Phi$  ist immer rechtshändig zum Strom orientiert

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B}^{(i)} \cdot d\mathbf{a} + \iint_S \mathbf{B}_{\text{fremd}} \cdot d\mathbf{a} = \Phi^{(i)} + \Phi_{\text{fremd}}$$

$$\text{mit } \Phi^{(i)} = L i$$

(6.32)

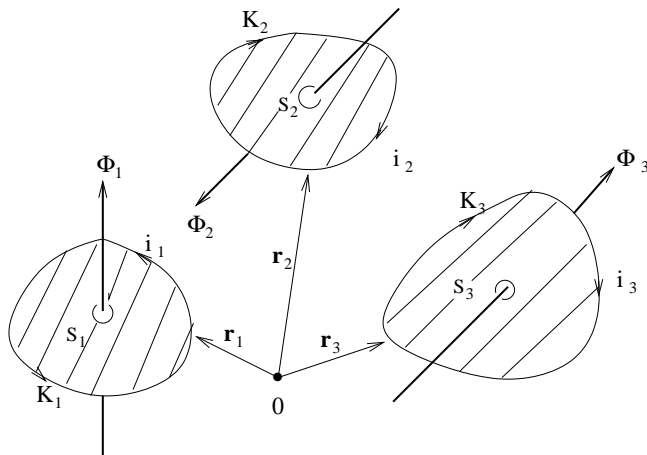
$$\text{Induktivität einer torusförmigen Spule der Höhe } h : L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln \frac{\rho_a}{\rho_i}$$

(6.33b)

$$\text{Induktivität einer Koaxialleitung der Länge } l : L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_a}{\rho_i} \right) l$$

(7.22a)

## Wechselseitige Induktivitäten



$$\Phi_1 = L_1 i_1 + \Phi_1^{(2)} + \Phi_1^{(3)} = L_1 i_1 + \iint_{S_1} \mathbf{B}^{(2)} \cdot d\mathbf{a}_1 + \iint_{S_1} \mathbf{B}^{(3)} \cdot d\mathbf{a}_1$$

(6.34, 6.35)



$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \quad (6.36a)$$

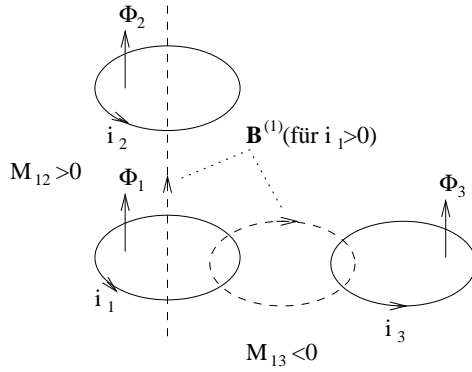
$$\Phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \quad (6.36b)$$

$$\Phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \quad (6.36c)$$

$$\text{mit } L_\nu = \left. \frac{\Phi_\nu}{i_\nu} \right|_{\substack{i_\mu=0 \\ \mu \neq \nu}} > 0 \quad (6.32)$$

$$\text{und } M_{\nu\mu} = \left. \frac{\Phi_\nu^{(\mu)}}{i_\mu} \right|_{i_\kappa=0} \stackrel{\kappa \neq \mu}{<} 0 \quad (6.38)$$

$$\text{Weiterhin gilt : } M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu} \quad (6.40)$$



Bei Erweiterung des Gleichungssystems (6.36) bleiben die alten Koeffizienten erhalten (im Ggs. zu den Kapazitätskoeffizienten), solange am ursprünglichen Teil der Anordnung nichts verändert wurde.

### Induzierte Spannungen im quasistationären Fall

$$U_1 = - \oint_{K_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{d}{dt}(M_{12} i_2) + \frac{d}{dt}(M_{13} i_3) \quad (7.3a)$$

$$U_2 = - \oint_{K_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{d}{dt}(M_{21} i_1) + \frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{d}{dt}(M_{23} i_3) \quad (7.3b)$$

$$U_3 = - \oint_{K_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_3 = \frac{d}{dt}(M_{31} i_1) + \frac{d}{dt}(M_{32} i_2) + \frac{d}{dt}(L_3 i_3) \quad (7.3c)$$

## INDUZIERTER QUASISTATIONÄRE STRÖME

Quasistationäre Elektrodynamik (d.h.  $\mathbf{J}$  und  $\rho$  zeitabhängig)

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}', t) \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' = -\nabla\varphi_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.43)$$

$$\text{mit } \varphi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (6.43c)$$

$$\mathbf{B}_{BS}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' = \text{rot } \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.44)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (6.44c)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = -\dot{\mathbf{A}}_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.55)$$

$$\text{Es gilt: } \mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{BS} \quad (6.56)$$

Weiterhin gilt (Gln. (6.58-6.60)) :

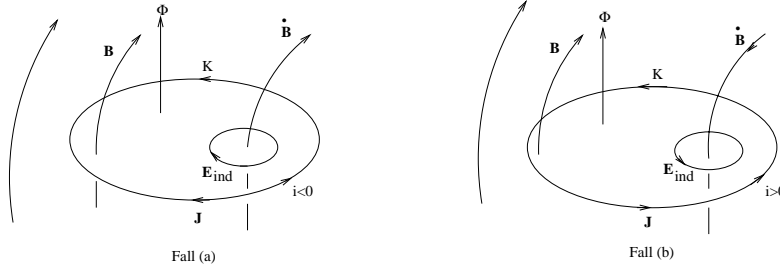
$$\text{div } \mathbf{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \mathbf{E}_C = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{B}_{BS} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B}_{BS} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_C)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{ind}} = \epsilon_0 \mu_0 \dot{\varphi}_s \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ind}} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\text{div } \mathbf{J} = -\dot{\rho}$$

### Induzierte Schleifenströme



$$\mathbf{J} = \frac{i}{a} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (7.4)$$

$$\text{Für } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ gilt } (\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \rightarrow \text{Gl. (7.45)}) : \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = i \oint_K \frac{ds}{\kappa a} =: i \overset{\circ}{R} = -\dot{\Phi}(\dot{B}) \quad (7.5 - 7.7)$$

In das Ohmsche Gesetz geht zwar das gesamte Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}}$  ein, doch trägt der wirbelfreie Summand  $\mathbf{E}_C$  nichts zur Umlaufspannung bei.

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} \text{ ist mit } \dot{\mathbf{B}} \text{ linkshändig verwirbelt gemäß: } \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ind}} = -\dot{\mathbf{B}}$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Im Falle zweier Schleifenströme gilt :  $\frac{di_2}{dt} + \frac{\overset{\circ}{R}_2}{L_2} i_2 = -\frac{M_{21}}{L_2} \frac{di_1}{dt}$  (7.8)

### Energie des $\mathbf{B}$ Feldes

$$P = \iiint_{\text{Draht}} \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 dV = i^2 \iiint_{\text{Draht}} \frac{dV}{\kappa a} = i^2 \oint_K \frac{ds}{\kappa a} = i^2 \overset{\circ}{R} = i \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.11)$$

Bei einer Stromschleife :  $W = \frac{1}{2} Li^2$  (7.12)

Bei (z.B) drei Stromschleifen :  $W = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3$  (7.16)

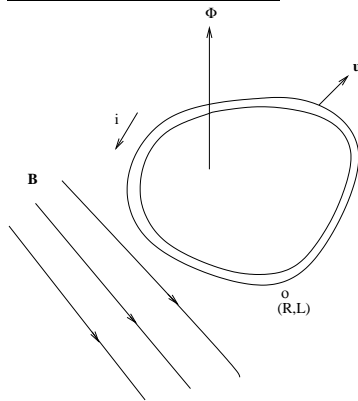
Räumliche Energiedichte :  $w_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$  (7.18)

Feldenergie eines Dreischleifensystems :  $W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Raum}} \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Raum}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV$  (7.19, 7.20)

anders ausgedrückt :  $W = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \left( i_\nu \oint_{K_\nu} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_\nu \right) = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2 + i_3 \Phi_3)$  (7.21)

Bemerkung: Aus Gl. (7.12):  $L = \frac{2W}{I^2}$  und Gl. (7.19):  $W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \mathbf{B}^2 dV$  läßt sich die Induktivität einer Anordnung berechnen.

### Bewegte Leiterschleifen



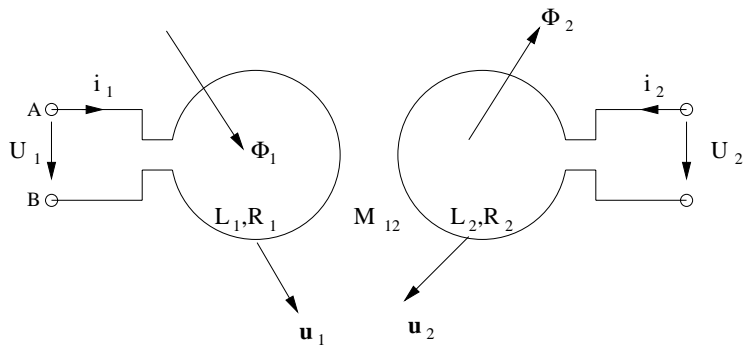
Das Ohmsche Gesetz lautet hier :  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\kappa}$  (7.43)

Faradaysche Flußregel :  $\oint (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \overset{\circ}{R} i = -\dot{\Phi} = -(\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \dot{\Phi}^{(u)})$  (7.45)

Ändert die Schleife ihre Form, dann ist L zeitabhängig und es gilt allgemein

$$\dot{\Phi} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \dot{\Phi}_{\text{fremd}} \quad (7.47)$$

Leistungsbilanz :  $P_{\text{mech}} = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{u} = \omega \cdot \mathbf{T}$  (A 97)



$$U_1 = R_1 i_1 + \dot{\Phi}_1 = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) \quad (\text{A } 75)$$

$$U_2 = R_2 i_2 + \dot{\Phi}_2 = R_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1) \quad (\text{A } 75)$$

Mit zeitabhängigen  $L_1, L_2, M_{12}$ . Bleiben die Leiterschleifen während der Bewegung geometrisch unverändert, dann ist nur  $M_{12}$  eine Funktion der Zeit. Bewegen sich die Leiterschleifen z.B. auseinander, so wird  $|M_{12}|$  kleiner.

## ELEKTRISCH POLARISIERBARE STOFFE

### Elektrische Polarisation

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \quad (8.1)$$

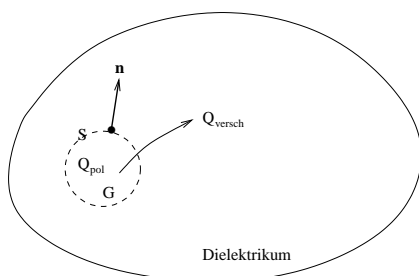
$$\text{mit dem Dipolmoment : } d\mathbf{p} = dQ \mathbf{l} \text{ und } dQ = \varrho_0 dV \quad (8.2, 8.3)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \varrho_0 \mathbf{l} \quad (8.4)$$

Es gilt immer ( $\mathbf{l}$  ist die Verschiebungsstrecke der Ladung) :  $\mathbf{P} \uparrow \downarrow \mathbf{l}$

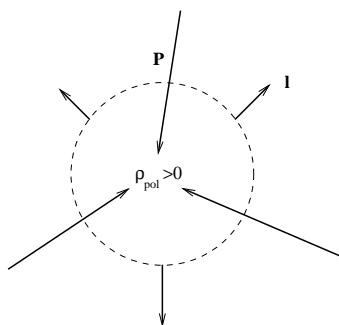
$$\mathbf{p} = \iiint \mathbf{P} dV \quad (\text{A 72})$$

### Polarisationsladungen (gebundene Ladungen !)



$$Q_{\text{pol}} = -Q_{\text{versch}} = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} \quad (8.7)$$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{P} = -\varrho_{\text{pol}}} \quad (8.8)$$

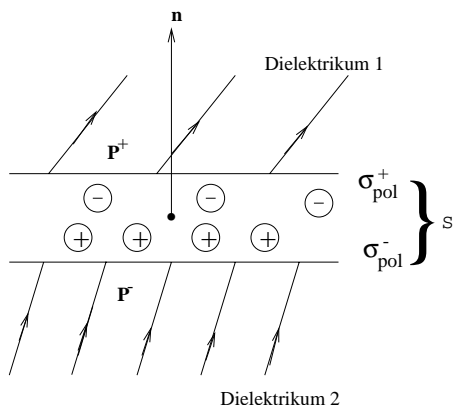


$\varrho_{\text{pol}} > 0 \rightarrow$  Senke des Feldes der Polarisation  $\mathbf{P}$  ( $\varrho_{\text{pol}} < 0 \rightarrow$  Quelle von  $\mathbf{P}$ )

$$\boxed{\sigma_{\text{pol}} = \frac{dQ_{\text{versch}}}{da} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}} \quad (8.9)$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Grenzbedingungen für den Polarisationsvektor:



$$\boxed{\text{Div } \mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-) = -\sigma_{\text{pol}}}$$
 (8.11)

Im Vakuum wie im Metall gilt:  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$

Polarisationsstrom

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} = \dot{\mathbf{P}}$$
 (8.15)

$$\text{div } \mathbf{J}_{\text{pol}} + \dot{\rho}_{\text{pol}} = 0$$
 (8.16)

Freie Ladungen und elektrische Verschiebungsdichte

Freie Ladungen: Leitungselektronen und Influenzladungen auf Metalloberflächen

Ausgehend von Gl. (3.4) und  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}}$  ergibt sich:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \dot{\mathbf{D}}$$
 (8.22)

mit der elektrischen Verschiebungsdichte  $\boxed{\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$  (8.20)

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho_f}$$
 (8.21)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f$$
 (8.23)

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} = -\epsilon_0 \dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$
 (8.24)

Die Grenzbedingungen von  $\mathbf{D}$

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) = \sigma_f}$$
 (8.26)

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{D} = \text{Rot } \mathbf{P} = \mathbf{n} \times (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-)}$$
 (8.27)

Im Inneren eines stromlosen und ruhenden Metallkörpers gilt:

$\mathbf{E} = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{P} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{0}$  und damit

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^+ = \sigma_f} \quad (8.28)$$

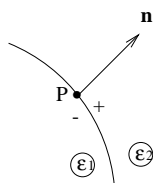
### Elektrische Materialgrößen

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\chi_e \text{ heißt elektrische Suszeptibilität}) \quad (8.31)$$

mit  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  und  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  folgt

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad (8.33)$$

### Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika (Annahme: $\sigma_f = 0$ )



$$\text{Div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{\text{pol}} \quad (\text{für } \sigma_f = 0) \quad (8.34)$$

$$\text{Rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0 \quad (8.35)$$

$$\text{Div } \mathbf{D} = 0 \quad (\text{für } \sigma_f = 0) \quad (8.36)$$

$$\text{Rot } \mathbf{D} = \text{Rot } \mathbf{P} \quad (8.37)$$

mit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(\text{pol})} + \mathbf{E}^{(\text{außen})}$

Gln. (8.35), (8.36) können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$E_t^+ = E_t^- \quad \epsilon_2 E_n^+ = \epsilon_1 E_n^- \quad (8.38, 8.41)$$

$$D_n^+ = D_n^- \quad \epsilon_1 D_t^+ = \epsilon_2 D_t^- \quad (8.39, 8.40)$$

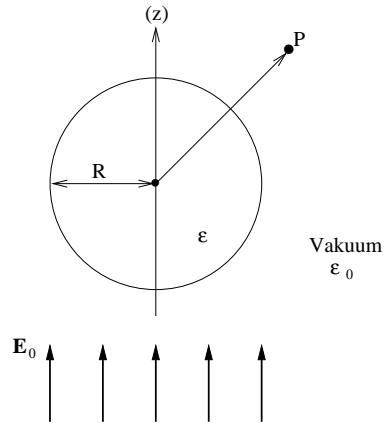
### Kapazität von Kondensatoren mit dielektrischen Stoffen

$$C = \frac{Q_f}{U} \quad (8.48)$$

$$C = \frac{\epsilon a}{l} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 a}{l} = \epsilon_r C_0 \quad (8.50)$$

D.h., die Werte für die Kapazität (auch der Kapazitätskoeffizienten und der Teilkapazitäten) erhöhen sich um  $\epsilon_r$ , falls der *gesamte* Feldraum mit einem Dielektrikum gefüllt wird.

### Homogen polarisierte Kugel (Bsp. 8.5.2c)



Aus (8.31) folgt für die Polarisation (allg. gültig)  $\boxed{\mathbf{P}_0 = (\epsilon - \epsilon_0)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(\text{pol})^-})}$  (A 71)

Innerhalb der Kugel gilt (Bsp. 8.2.1a) :  $\mathbf{E}^{(\text{pol})} = \mathbf{E}^{(\text{pol})^-} = -\frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}$

$$\Rightarrow P_0 \mathbf{e}_z = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \mathbf{e}_z \quad (8.46)$$

Falls Kugel statt im Vakuum in einem Dielektrikum der Permittivität  $\epsilon_1$  sitzt, gilt

$$P_0 \mathbf{e}_z = 3\epsilon_1 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_1} E_0 \mathbf{e}_z \quad (\text{A 71})$$

Das  $\mathbf{E}$  Feld der Influenzladungen der Kugel im Außenraum kann durch einen fiktiven

Punktdipol  $\mathbf{p} = p_z \mathbf{e}_z$  im Kugelmittelpunkt beschrieben werden gemäß :

$$p_z = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \quad (5.42)$$



## MAGNETISCH POLARISIERBARE STOFFE

### Magnetische Polarisation

$$\boxed{M = \frac{d\mathbf{m}}{dV}} \quad (9.1)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{m}$  das magnetische Dipolmoment.

### Magnetisierungsströme

$$\mathbf{J}_{\text{mag}} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (9.4)$$

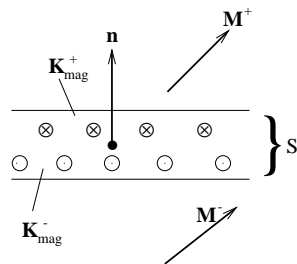
$$\text{Magnetisierungsströme sind quellenfrei : } \text{div rot } \mathbf{M} = \text{div } \mathbf{J}_{\text{mag}} = 0 \quad (9.8a)$$

$$\mathbf{K}_{\text{mag}} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (9.5)$$

$$\oint_K \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{mag}} \quad (9.7)$$

$$\text{Magnetisierungsstrom durch beliebige Hüllfläche : } \dot{I}_{\text{mag}} = 0 \quad (9.8b)$$

### Grenzbedingung der Magnetisierung



$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) = \mathbf{K}_{\text{mag}}} \quad (9.6)$$

### Freie Ströme und magnetische Feldstärke

$$\text{Die vierte MWG geht über in : } \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (9.12)$$

$$\text{Mit (8.15), (8.20) und (9.4) ergibt sich : } \boxed{\text{rot } \left( \underbrace{\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}_{:= \mathbf{H}} \right) = \mathbf{J}_f + \dot{\mathbf{D}}} \quad (9.13 - 9.15)$$

In integraler Form ergibt sich :

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_f + \iint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\text{statisch}}{=} I_f \quad (9.16)$$

### Grenzbedingungen von $\mathbf{H}$

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{K}_f \quad (9.19)$$

$$\text{Div } \mathbf{H} = -\text{Div } \mathbf{M} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) \quad (9.20)$$

### Magnetische Materialgrößen

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\chi_m \text{ heißt magnetische Suszeptibilität}) \quad (9.24b)$$

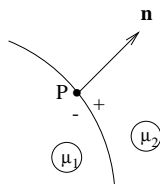
$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad \text{mit } \mu_r = 1 + \chi_m \quad \text{und } \mu = \mu_r \mu_0 \quad (9.25)$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \quad (\text{Gesamtfelder!}) \quad (9.26)$$

$$\text{Permanente Magnetisierung : } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{A 74})$$

Es gilt: homogenes  $\mathbf{M}$   $\Leftrightarrow$  inhomogenes  $\mathbf{B}_{\text{mag}}$  (vgl. Bild 9.9)

### Grenzflächen zwischen verschiedenen permeablen Bereichen



$$\text{Div } \mathbf{H} = -\text{Div } \mathbf{M} \quad (9.27)$$

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = 0 \quad (\text{für } \mathbf{K}_f = \mathbf{0}) \quad (9.28)$$

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (9.29)$$

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{K}_{\text{mag}} + \mathbf{K}_f) \stackrel{\mathbf{K}_f=0}{=} \mu_0 \mathbf{K}_{\text{mag}} \quad (9.30)$$

Gln. (9.28), (9.29) können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$H_t^+ = H_t^- \quad \mu_2 H_n^+ = \mu_1 H_n^- \quad (9.31, 9.34)$$

$$B_n^+ = B_n^- \quad \mu_1 B_t^+ = \mu_2 B_t^- \quad (9.32, 9.33)$$

### Weitere Formeln

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = \kappa \mathbf{E}} \quad (9.42)$$

Von dieser *Hauptgleichung der Elektrodynamik* geht man in (ruhenden) ohmschen Leitern auch unter dynamischen Bedingungen aus.

$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{mag}} = (\mu_r - 1) \mathbf{J}_f = (\mu_r - 1) \kappa \mathbf{E}} \quad (9.43)$$

### Induktivität von Spulen mit hochpermeablen Stoffen

Es bezeichne  $L_0$  die Induktivität einer Spule im leeren Raum. Dieser Wert ändert sich (wie auch die Werte der Induktivitätskoeffizienten bei Mehrschleifensystemen), wenn der *ganze* Feldraum mit einem *hochpermeablen* Stoff ( $\mu_r$ ) erfüllt wird. Es ergibt sich :

$$\boxed{L = \mu_r L_0} \quad (9.41)$$

### Die Maxwell-Gleichungen mit $\mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$

Mit den Hilfsfeldern  $\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$  und  $\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}}$  (9.44, 9.45)

ergibt sich :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho_f \quad (9.46)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (9.47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.48)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \dot{\mathbf{D}} \quad (9.49)$$

mit den Grenzbedingungen :

$$\operatorname{Div} \mathbf{D} = \sigma_f \quad (9.50)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (9.51)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.52)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{K}_f \quad (9.53)$$

und den Materialgleichungen :

$$\mathbf{J}_f = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9.54)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9.55)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.56)$$

Gln. (9.55) und (9.56) setzen ruhende Medien voraus. Bei selbst kleinen Materialgeschwindigkeiten müssen sie folgendermaßen modifiziert werden :

$$\mathbf{D} = \epsilon \left[ \mathbf{E} + \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right] \quad (9.57)$$

$$\mathbf{B} = \mu \left[ \mathbf{H} - \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{D} \right] \quad (9.58)$$

## ELEKTROMAGNETISCHE ENERGIEBILANZ

$$\text{Elektrische Energiedichte : } w_E = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (4.53)$$

$$\text{Magnetische Energiedichte : } w_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (7.18)$$

### Elektrische Leistungsdichte

$$p_e = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.6)$$

$$\text{Mit Gl. (8.20) ergibt sich : } p_e = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial(\mathbf{E}^2)}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (10.7)$$

$$\text{Und schließlich mit Gln. (4.53), (8.15) : } \boxed{p_e = \dot{w}_E + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{pol}}} \quad (10.8)$$

Aussage: Mit der einem Volumenelement im Dielektrikum zugeführten Leistung wird dort der Energieinhalt des  $\mathbf{E}$  Feldes geändert und Polarisationsarbeit geleistet.

### Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika

$$\text{Lineare Dielektrika gehorchen der Beziehung : } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (10.13)$$

$$\text{Gespeicherte elektrische Energie : } W_e = \iiint_G \underbrace{\left( \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right)}_{w_e} dV \quad (10.14)$$

$$\boxed{w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}} \quad (10.17)$$

Gl. (10.17) wurde gegenüber Gl. (4.53) um den rechten Summanden erweitert, da die Erhöhung der Polarisation Energie kostet.

$$\text{Energie eines mit Dielektrika gefüllten Kondensators : } W_e = \frac{1}{2} Q_f U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C} \quad (10.18)$$

Generell gilt: Die elektrische Energiedichte in einem Dielektrikum ist um das  $\epsilon_r$  - fache *größer* als im Vakuum bei gleicher elektrischer Feldstärke.

### Magnetische Leistungsdichte

$$p_m = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.25)$$

$$\boxed{p_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \dot{w}_B + \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \dot{w}_B + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{mag}}} \quad (10.26)$$

Aussage: Mit der einem magnetisierbaren Körper insgesamt zugeführten Leistung wird der Energieinhalt des  $\mathbf{B}$  Feldes geändert und Magnetisierungsarbeit geleistet.

## Gespeicherte Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe

Im linearen Bereich der Hysteresekurve gilt :  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  (10.36)

$$\boxed{w_m = \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}$$
 (10.37)

Energie einer gefüllten Spule :  $W_m = \frac{1}{2} i_f \Phi = \frac{1}{2} L i_f^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$  (10.38)

Mit  $\Phi$  ist der gesamte von  $i_f$  (rechtshändig) umfaßte Spulenfluß gemeint und nicht nur ein Querschnittsfluß.

## Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

Gesamte zugeführte Leistungsdichte :  $p_{\text{ges}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  (10.39)

mit dem Poynting-Vektor  $\boxed{\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}}$  (10.45)

folgt  $\boxed{\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \text{div} \mathbf{S} = -\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)}$  (10.46)

Das Minuszeichen tritt auf, da die Flächennormale nach *außen* gerichtet sein soll.

Eine andere Schreibweise der elektromagnetischen Energiebilanz lautet :

$$\boxed{\text{div}\left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right) = -\mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \mathbf{J}_{\text{mag}}\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right)}$$
 (10.48)

Lokale Energiebilanz :  $\text{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_b + w_{\text{ohmsch}})$  (A 86)

Energiestrom (Leistungstransport) durch eine Querschnittsfläche :

$$P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$
 (A 78)

## RETARDIERTE LÖSUNGEN DER MWG

### Allgemeine homogene Wellengleichungen

Eine eindimensionale entlang der z-Achse laufende Welle gehorcht der DGL :

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \ddot{w} = 0 \quad (11.3)$$

Als Lösung ergibt sich :

$$w(z, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{z}{c}\right)}_{\text{in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{g\left(t + \frac{z}{c}\right)}_{\text{entgegen } z\text{-Richtung}} \quad (11.1)$$

Eine mehrdimensionale Welle gehorcht entsprechend der DGL :

$$\nabla^2 \mathbf{w} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (11.4)$$

### Inhomogene Wellengleichung für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (11.13)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\mathbf{A}} \quad (11.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \varrho + \mu_0 \dot{\mathbf{J}} \quad (11.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{B}} = -\mu_0 \text{rot } \mathbf{J} \quad (11.11)$$

$$\text{Beide Gleichungen sind miteinander gekoppelt gemäß : } \text{div } \mathbf{J} = -\dot{\varrho} \quad (11.12)$$

### Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (11.18)$$

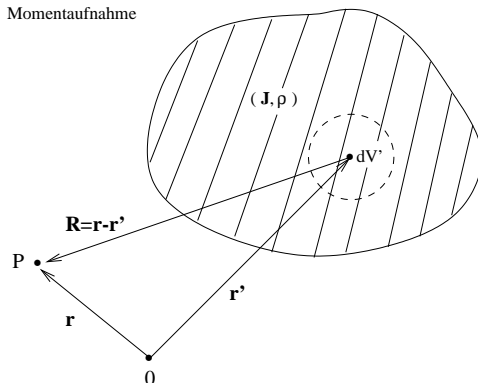
$$\text{mit der sog. Lorentz-Bedingung : } \text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c_0^2} \dot{\varphi} \quad (11.17)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\varphi} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad (11.19)$$

In Gln.(11.18) und (11.19) dürfen  $\mathbf{J}$  und  $\varrho$  nicht beliebig gewählt werden, denn sie müssen der Kontinuitätsgleichung (11.12) genügen.

## Retardierte Potentiale

Momentaufnahme



$$t^* = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \quad (11.20)$$

Eine von  $dV'$  kommende Größe müßte zur *retardierten Zeit*  $t^*$  gesendet worden sein, damit sie zur Zeit  $t$  am Punkt  $P$  ankommt.

Damit ergeben sich folgende *retardierte Potentiale* :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.21)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.22)$$

und die *retardierten* Lösungen der Maxwell-Gleichungen :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.49a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.49b)$$

Andere Darstellung :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[ \varrho + \frac{R}{c_0} \dot{\varrho} \right]^* \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\mathbf{j}]^* \frac{1}{R} dV' \quad (11.50a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ \mathbf{J} + \frac{R}{c_0} \dot{\mathbf{j}} \right]^* \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (11.50b)$$

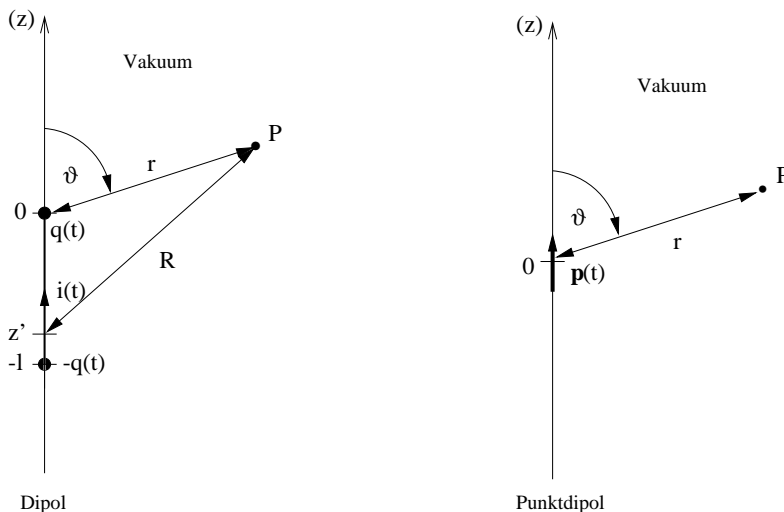
Dabei ist Gl. (11.50b) die dynamische Verallgemeinerung der Biot-Savart Formel.

Vektorpotential eines Linienstroms entlang der  $z$ -Achse ( $R$ : Abstand  $P \rightarrow z'$ ) :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(t^*)}{R} dz' \mathbf{e}_z \quad (11.58)$$



## Zeitveränderlicher Dipol (Hertzscher Dipol)



$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(z', t^*) dz'}{R} \mathbf{e}_z \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l}^0 \frac{i(t^*) dz'}{R} \mathbf{e}_z \quad (11.65, 11.66)$$

$$\text{mit } p_z(t) = q(t) l \quad \rightarrow \quad \dot{p}_z(t) = i(t) l \quad (11.64)$$

Nach Übergang zum Punktdipol ergibt sich :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0 \dot{p}_z(t_0^*)}{4\pi r} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 \dot{p}_z(t_0^*)}{4\pi r} (\cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \quad (11.68)$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\dot{p}_z}{r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.70)$$

Der Klammerausdruck ist zur retardierten Zeit  $t_0^* = t \Leftrightarrow r/c_0$  zu nehmen.

$$\text{Mit } \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$$

folgt :

$$E_r(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta \quad (11.71a)$$

$$E_\vartheta(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta \quad (11.71b)$$

$$E_\alpha(P, t) = 0 \quad (11.71c)$$

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^2} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \cos \vartheta \quad (11.85)$$

### Zeitharmonisches Dipolmoment

Ein Hertzscher Dipol schwinde gemäß  $p_z(t) = \hat{p}_z \sin \omega t$ ,  $t > 0$  (11.74)

mit  $t_0^* = t - \frac{r}{c_0}$   
 und  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$  (11.76)

erhält man die nichtverschwindenden Komponenten des elektromagnetischen Feldes :

$$E_r(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \sin(\omega t_0^*) + kr \cos(\omega t_0^*) \right] 2 \cos \vartheta \quad (11.77a)$$

$$E_\vartheta(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \sin(\omega t_0^*) + kr \cos(\omega t_0^*) - k^2 r^2 \sin(\omega t_0^*) \right] \sin \vartheta \quad (11.77b)$$

$$B_\alpha(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 c_0 r^3} \left[ kr \cos(\omega t_0^*) - k^2 r^2 \sin(\omega t_0^*) \right] \sin \vartheta \quad (11.77c)$$

In der sog. *Nahzone* ( $2\pi r \ll \lambda$ ) gilt :

$$\mathbf{E}(P, t) = \frac{\hat{p}_z \sin \omega t}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \quad (11.78a)$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \omega \hat{p}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.78b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 i(t) l \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (11.79)$$

In der sog. *Fernzone* ( $2\pi r \gg \lambda$ ) gilt :

$$\mathbf{E} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi\epsilon_0 c_0^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (11.80a)$$

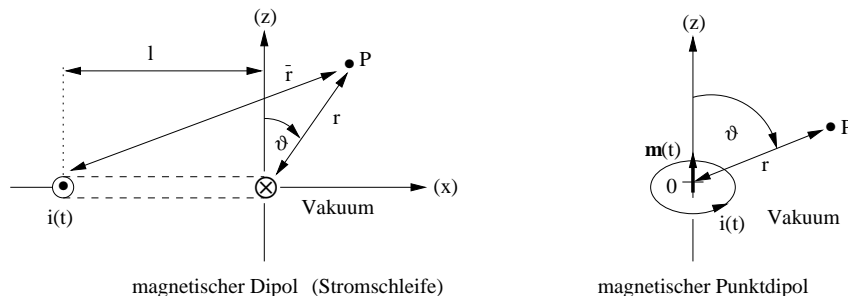
$$\mathbf{B} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi\epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\alpha \quad (11.80b)$$

Für den Poytning-Vektor erhält man in der Fernzone :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\omega^4 \hat{p}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*) \sin^2 \vartheta}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c_0^3} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.81)$$

Die Energie wird bevorzugt in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$ . abgestrahlt

## Zeitveränderlicher magnetischer Dipol (Fitzgeraldscher Dipol)



$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{i(t_0^*)}{r} - \frac{i(\bar{t}^*)}{\bar{r}} \right] l \mathbf{e}_y \quad (11.86)$$

mit  $t_0^* = t - \frac{r}{c_0}$  und  $\bar{t}^* = t - \frac{\bar{r}}{c_0}$

Nach Übergang zum Punktdipol ( $r \gg l$  bzw.  $l \rightarrow 0, il^2 = m_z = \text{const}$ ) ergibt sich

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^2} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.87)$$

$$\mathbf{E}(P, t) \stackrel{\text{allg.}}{=} -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \stackrel{\text{hier: } \varphi=0}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\dot{m}_z}{r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.88)$$

$$B_r(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta \quad (11.89a)$$

$$B_\vartheta(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta \quad (11.89b)$$

$$B_\alpha(P, t) = 0 \quad (11.89c)$$

### Zeitharmonisches Dipolmoment

Ein Fitzgeraldscher Dipol schwinge gemäß  $m_z(t) = \hat{m}_z \sin \omega t$ ,  $t > 0$  (11.90)

Insbesondere in der *Fernzone* ( $2\pi r \gg \lambda$ ) gilt (Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$ ):

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (11.92a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_0 \mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\alpha \quad (11.92b)$$

Für den Poynting-Vektor erhält man in der Fernzone

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega^4 \hat{m}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*) \sin^2 \vartheta}{(4\pi)^2 c_0^3} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.93)$$

Energie wird also mit einer zu  $\omega^4$  proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$ .

Bem.: Liegen in einer Anordnung sowohl unkompensierte Ladungen als auch Stromschleifen vor, so muß man Gln. (11.80) und (11.92) entsprechend kombinieren.

### Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen

Die Wellengleichungen nehmen mit  $\epsilon\mu = \epsilon_r\mu_r/c_0^2$  folgende Form an :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r\mu_r}{c_0^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \varrho_f + \mu_r \dot{\mathbf{J}}_f \quad (11.98)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\epsilon_r\mu_r}{c_0^2} \ddot{\mathbf{B}} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_f \quad (11.99)$$

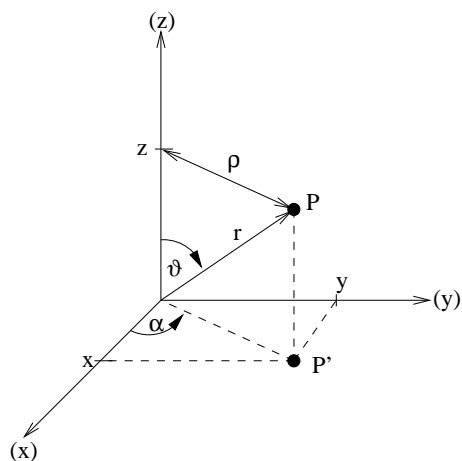
$$\text{Mit : } c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (11.100)$$

Der Geschwindigkeitsparameter ist also kleiner als im Vakuum, wo

$c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  gilt.

In einem reinem Dielektrikum setzt man  $\varrho_f = 0, \mathbf{J}_f = \mathbf{0}$  und  $\mu_r = 1$ . Für das betrachtete Dielektrikum gilt also :  $\frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r} = n$  (n: Brechungsindex)

## ANHANG: KOORDINATENSYSTEME



Dabei sind  $\left. \begin{array}{l} x, y, z \text{ kartesische} \\ \varrho, \alpha, z \text{ zylindrische} \\ r, \vartheta, \alpha \text{ sphärische} \end{array} \right\} \text{Koordinaten von P}$

### Ortsvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen

Kartesische Koordinaten :  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zylindrische Koordinaten :  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \alpha \\ \varrho \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$

Sphärische Koordinaten :  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \alpha \\ r \sin \vartheta \sin \alpha \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$

mit :  $r > 0, \varrho < \infty, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$