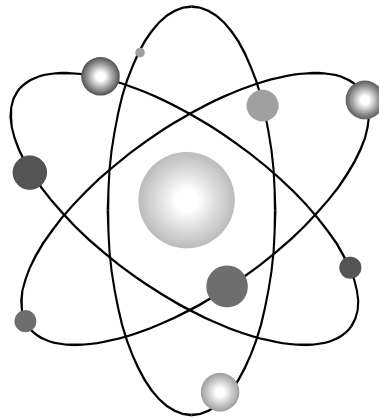


# Formelsammlung

## T E D Y



Verfaßt von

Dieter Braisch

© Frühling 1997

überarbeitet von Wilko Kraß

Herbst 1997 und Sommer 1998

**Elektrotechnische  
Gruppe  
Kurzschluß**  
**ETG** 

Keine Gewähr für den Inhalt und evtl. Fehler !  
Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an [Wilko.Krass@stud.uni-erlangen.de](mailto:Wilko.Krass@stud.uni-erlangen.de)

# 1. Vektoranalytische Hilfsmittel

Niveauflächen und Feldlinien  $\vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r} = \vec{0}$ , Parallelität von  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  und  $d\mathbf{r}$  (1.1, S.3)  
 Pfeilrichtung der Feldlinien nicht vergessen !

Gradient  $grad U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$ , and. 1.56, S.46 (1.5, S.6)

Gradienteneigenschaft  $dU = (grad U) \cdot d\vec{r}$  (1.4, S.6)

Fluß durch die Fläche S  $\Psi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$  (1.9, S.8)

Ergiebigkeit  $\Psi = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$  Vorzeichen des Integrals sagt über Quellen oder Senken aus (1.10, S.11)

Divergenz  $div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} = \lim_{V \rightarrow \vec{r}} \frac{\oiint \vec{F} \cdot d\vec{a}}{V}$ , Def. 1.11a, and. 1.57, S.46 (1.12, S.14)

**Satz von Gauß**  $\oiint_S \vec{F} d\vec{a} = \iiint_G div \vec{F} dV$  Hüllintegrale und Raumintegrale verknüpft (1.14a, S.18)

$$\delta(r) := \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

**Dreidimensionale Deltafunktion:**  $\iiint_G \delta(r) dV = \{1, \text{ falls Ursprung enthalten, } 0 \text{ sonst}\}$  (1.17, S.20)

$$div(grad \frac{1}{r}) = div(-\frac{\vec{r}}{r^3}) = -4\pi\delta(r)$$

## Sätze von Green

1.  $\oiint_S (U_1 \nabla U_2) \cdot d\vec{a} = \iiint_G [U_1 \nabla^2 U_2 + (\nabla U_1) \cdot (\nabla U_2)] dV$  (1.23, S.21)

$$U_1 = 1 \text{ und } U_2 = U$$

**Spezialfall:**  $\oiint_S (\nabla U) \cdot d\vec{a} = \iiint_G (\nabla^2 U) dV$  (1.25, S.22)

2.  $\oiint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{a} = \iiint_G (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1) dV$  (1.24, S.22)

$$U_1 = U_2 = U$$

**Spezialfall:**  $\oiint_S (U \nabla U) \cdot d\vec{a} = \iiint_G [U \nabla^2 U + (\nabla U)^2] dV$  (1.26, S.22)

**Satz von Gauß für den Gradienten**  $\iiint_G (grad U) dV = \oiint_S U d\vec{a}$  (1.27, S.22)

Zirkulation  $Z = \oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist eine skalare Größe (1.29, S.24)

Rotation  $rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) \vec{e}_x - (\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}) \vec{e}_y + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \vec{e}_z$  (1.32, S.27)  
 Def. 1.30a, Rotation und Zirkulation 1.30c, and. 1.58, S.46

<b>Satz von Stokes</b>	$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{a}$ Kurven- und Flächenintegrale	(1.35a, S.32)
------------------------	---	---------------

**Verschiedenes:** Formeln nach S.33ff

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{grad} U_2 + U_2 \text{grad} U_1 \quad (1.36a, S.33) \quad \text{div}(U\vec{F}) = U \text{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad} U \quad (1.36b, S.33)$$

$$\text{div}(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \text{rot} \vec{F}_1 - \vec{F}_1 \cdot \text{rot} \vec{F}_2 \quad (1.36c, S.33) \quad \text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad} U \quad (1.36d, S.33)$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \text{grad}(\text{div} \vec{F}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{F}) \quad (1.36e, S.33)$$

Richtungsableitung, Punktdipolformeln für Kraft und Drehmoment

$$(\vec{G} \cdot \nabla) U = \vec{G} \cdot \text{grad} U \quad (1.36f, S.33)$$

$$\begin{aligned} (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} &= (\vec{G} \cdot \text{grad} F_x) \vec{e}_x + (\vec{G} \cdot \text{grad} F_y) \vec{e}_y + (\vec{G} \cdot \text{grad} F_z) \vec{e}_z \\ &= G_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.36g, S.33)$$

$$= G_\rho \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} G_\alpha \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \quad \text{auch Einheitsvektoren ableiten !} \quad (1.60a, S.47)$$

$$= G_r \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} G_\vartheta \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} G_\alpha \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha} \quad \text{auch Einheitsvektoren ableiten !} \quad (1.60b, S.47)$$

$$2(\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} = \text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) + \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) - \vec{F} \text{div} \vec{G} + \vec{G} \text{div} \vec{F} - \vec{F} \times \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \times \text{rot} \vec{F} \quad (1.36h, S.33)$$

Seltenes:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \text{rot} \vec{G} + \vec{G} \times \text{rot} \vec{F} \\ (\vec{G} \cdot \nabla) U \vec{F} &= \vec{F} (\vec{G} \cdot \text{grad} U) + U (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} \end{aligned} \quad (1.36i-k, S.34)$$

$$\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + \vec{F} \text{div} \vec{G} - \vec{G} \text{div} \vec{F}$$

Gradientenfelder sind wirbelfrei	$\text{rot}(\text{grad} U) = \vec{0}$	$\oint (\text{grad} U) \cdot d\vec{r} = 0$	$\oint dU = 0$	(1.37-38, S.34)
----------------------------------	---------------------------------------	--	----------------	-----------------

Rotorfelder sind quellenfrei	$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$	$\oiint (\text{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{a} = 0$	(1.39-40, S.26)
------------------------------	--------------------------------------	--	-----------------

<b>Satz von Gauß für die Rotation</b>	$\iiint \text{rot} \vec{F} dV = \oiint (\vec{n} \times \vec{F}) da = -\oiint \vec{F} \times d\vec{a}$	(1.41, S.36)
---------------------------------------	---	--------------

**Skalares Potential**  $\vec{F} = -\text{grad} U$  F: Gradientenfeld (1.43, S.37)

$$U(P) = -\int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left( \int_{x_0}^x F_x(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_y(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_z(x, y, t) dt \right)$$

Notwendige Bedingungen für die Existenz des skalaren Potentials zum Vektorfeld **F**

**global wirbelfrei** (ist auch hinreichende Bedingung), d.h.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Kurve oder wenn } U \text{ bestimmbar} \quad (1.44, S.37)$$

als auch **lokal wirbelfrei**, d.h.

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \text{in allen Feldpunkten} \quad (1.45, S.37)$$

hinreichende Bedingung wenn das Gebiet *einfach zusammenhängend* (Def. S.38, 39) ist.

## Divergenz und Rotation als wesentliche Bestimmungsstücke eines Vektorfeldes

**Eindeutigkeitssatz (S.41):**

Gegeben:  $u(\vec{r})$  skalare Funktion,  $\vec{w}(\vec{r})$  vektorielle Funktion,  $f(\vec{r})$  berandende Oberfläche S

dann hat das folgende Gleichungssystem höchstens eine Lösung  $\vec{F}$  :

$$\operatorname{div}\vec{F} = u \quad (\text{in } G), \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{w} \quad (\text{in } G), \quad \vec{F} \cdot \vec{n} = f \quad (\text{auf } S) \quad (1.47, \text{ S. 41})$$

**Poissonsche Differentialgleichung (S.42, partikuläre Lösung von 1.47a,b)**

$$\nabla^2 \vec{F} = \operatorname{grad} u - \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{g} \quad \text{vektorielle Poissongleichung} \quad (1.50a, \text{ S.42})$$

### **Vektoranalytische Operationen und Hilfsmittel**

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha \quad (1.56a,b, \text{ S.46})$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right] \quad (1.57a,b, \text{ S.46})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right] \vec{e}_\rho + \left[ \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \vec{e}_\alpha + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\alpha) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \alpha} \right] \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\alpha) \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\alpha \end{aligned} \quad (1.58a,b, \text{ S.46})$$

$$\nabla^2 U = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \nabla \cdot (\nabla U) \quad (1.20, 1.21, \text{ S. 21}) \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.19, \text{ S.21})$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.59a, \text{ S.47})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \end{aligned} \quad (1.59b,c, \text{ S.47})$$

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x) \vec{e}_x + (\nabla^2 F_y) \vec{e}_y + (\nabla^2 F_z) \vec{e}_z \quad (1.22, \text{ S.21})$$

Totales Differential S. 47

### **Nützliche Formeln**

Siehe Buch S. 49ff

$$\text{Umfangsgeschwindigkeit: } \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{Kugel: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad O = 4\pi R^2$$

Die folgende Tabelle entstammt teilweise dem Buch aber auch dem Bronstein S.564 ff.

Zylinderkoordinaten	$\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\}$	Kugelkoordinaten	$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\alpha\}$
$\vec{e}_\rho = \sin\vartheta \vec{e}_r + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_z$		$\vec{e}_r = \sin\vartheta \vec{e}_\rho + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta \vec{e}_\rho - \sin\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha$	
$\rho = r \sin\vartheta$ $\alpha = \alpha$ $z = r \cos\vartheta$		$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ u. a.: $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \sin\vartheta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ $\alpha = \alpha$	
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\alpha$ aus Dreiecksbeziehungen ! $z = z$		$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ u. a.: $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\alpha$ aus Dreiecksbeziehungen	
$\vec{e}_\rho = \cos\alpha \vec{e}_x + \sin\alpha \vec{e}_y$ $\vec{e}_\alpha = -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y$ $\vec{e}_z = \vec{e}_z$		$\vec{e}_r = \sin\vartheta \cos\alpha \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\alpha \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta \cos\alpha \vec{e}_x + \cos\vartheta \sin\alpha \vec{e}_y - \sin\vartheta \vec{e}_z$ (1.51, S.44) $\vec{e}_\alpha = -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y$	
$x = \rho \cos\alpha$ $y = \rho \sin\alpha$ $z = z$		$x = r \sin\vartheta \cos\alpha$ $y = r \sin\vartheta \sin\alpha$ $z = r \cos\vartheta$	
$\vec{e}_x = \cos\alpha \vec{e}_\rho - \sin\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_y = \sin\alpha \vec{e}_\rho + \cos\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \vec{e}_z$		$\vec{e}_x = \sin\vartheta \cos\alpha \vec{e}_r + \cos\vartheta \cos\alpha \vec{e}_\vartheta - \sin\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_y = \sin\vartheta \sin\alpha \vec{e}_r + \cos\vartheta \sin\alpha \vec{e}_\vartheta + \cos\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$	
$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \alpha} = \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\vec{e}_\rho$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial r} = 0$
	(1.52, S.44)		$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} = \vec{e}_\vartheta$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\vec{e}_r$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \vartheta} = 0$
			$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \alpha} = \sin\vartheta \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \alpha} = \cos\vartheta \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\sin\vartheta \vec{e}_r - \cos\vartheta \vec{e}_\vartheta$
			(1.52, S.44)
$d\vec{r} = (d\rho) \vec{e}_\rho + (\rho d\alpha) \vec{e}_\alpha + (dz) \vec{e}_z$ (1.53a, S.44) $d\vec{a} = \rho d\alpha dz \vec{e}_\rho$ (1.55a-c, S.46) bzw. $d\rho dz \vec{e}_\alpha$ bzw. $\rho d\rho d\alpha \vec{e}_z$ (1.54a, S.45) $dV = \rho d\rho d\alpha dz$		$d\vec{r} = (dr) \vec{e}_r + (r d\vartheta) \vec{e}_\vartheta + (r \sin\vartheta d\alpha) \vec{e}_\alpha$ (1.53b, S.45) $d\vec{a} = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\alpha \vec{e}_r$ (1.54d-e, S.46) bzw. $r \sin\vartheta dr d\alpha \vec{e}_\vartheta$ bzw. $r dr d\vartheta \vec{e}_\alpha$ (1.54b, S.46) $dV = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta da$	

Vorsicht: Die Ursprünge der Koordinatensysteme müssen zusammenfallen und wie üblich ausgerichtet sein ! Viele der Beziehungen können durch eine Zeichnung schnell hergeleitet werden !

**Kreuzprodukt**  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$

**Doppeltes Vektorprodukt**  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

**Kosinussatz:**  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$   $\gamma$  liegt c gegenüber

## 2. Ladung, Strom und EM-Feld

### Coulombsches Gesetz

2 Ladungen:  $\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{21} = -\vec{F}_2$  (2.5a,b, S.54)

3 Ladungen  $\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}^2} \vec{e}_{13} + \frac{q_2}{r_{23}^2} \vec{e}_{23} \right)$  usw. (S.54 unten)

Gilt nur für ruhende Punktladungen, Coulombsche Kräfte gehorchen dem Superpositionsprinzip

**Ladungsdichten**    Raumladung     $\rho(r) = \frac{dQ}{dV}$      $Q = \iiint_G \rho dV$  (2.6a,b, S.55)

Flächenladung     $\sigma(r) = \frac{dQ}{da}$      $Q = \iint_S \sigma da$  (2.7a,b, S.56)

Linienladung     $\tau(r) = \frac{dQ}{ds}$      $Q = \int_K \tau ds$  (2.8a,b, S.56)

Kraft einer unendlichen Linienladung auf eine Ladung  $\vec{F}_q = q \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} \vec{e}_\rho$  (2.9, S.58)

dq-Ansatz:  $dq = \tau ds = \sigma da = \rho dV = idt \dots$

**Strom**     $I = \frac{dQ}{dt}$  (S.58 Mitte)

Stromdichten    nur bei Elektronen     $\vec{J} = -en\vec{u}_- = \rho_- \vec{u}_-$  (2.11a, S.60)

$\vec{J} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$  (2.11b, S.60)     $dI = \vec{J} \cdot \vec{n} da$  (2.13b, S.61)     $I = \iint_S \vec{J} d\vec{a}$  (2.12, S.60)

$\vec{K} = \sigma_+ \vec{u}_+ + \sigma_- \vec{u}_-$  (2.15, S.61)     $dI = \vec{K} \cdot \vec{t} ds$  (2.16, S.62)     $I = \int_K \vec{K} \cdot \vec{t} \cdot ds$

$i = \tau_+ u_+ + \tau_- u_-$  falls J homogen und parallel zu n ist, gilt:  $\vec{J} = \frac{I}{a} \vec{n}$  (2.14, S.61)

**Ampèresches Gesetz**     $\frac{\Delta \vec{F}_1}{\Delta s} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{\rho_{12}} \vec{e}_{21} = -\frac{\Delta \vec{F}_2}{\Delta s}$  (2.17a,b, S.65)

mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$  (2.18c, S.65)     $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$  (2.21, S.65)

### Kontinuitätsgleichung

global  $\frac{dQ}{dt} = -I$  (2.22, S.66)    lokal  $div \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  (2.23, S.67)

Anwendung z.B. bei punktueller Vorgehensweise, wie in Bsp.2.3.1a, S.67 (Dipolantenne)

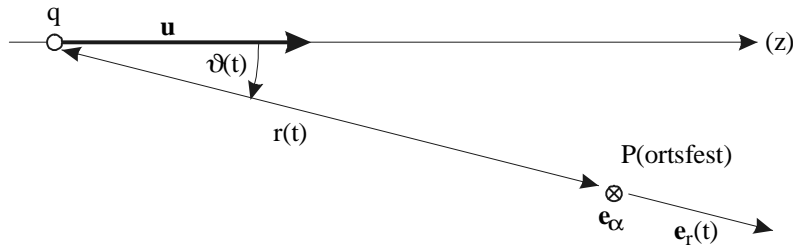
**Lorentzkraft**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \quad \text{Kraft auf eine bewegte Punktladung} \quad (2.24, S.71)$$

dF- Ansatz mit  $dq \cdot \vec{u} = i \cdot d\vec{r} = \vec{K} \cdot da = \vec{J} \cdot dV = \rho dV \cdot \vec{u}$  **Stromelementformen**

**EM-Feld gleichförmig bewegter Punktladungen**

Bild 2.16



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \vec{e}_r \quad (2.25, S.73) \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \vec{u} \times \vec{e}_r \quad (2.26, S.73)$$

wenn  $\vec{u} = \vec{0}$   $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$   $\vec{B} = \vec{0}$  (2.27, S.73)

wenn  $\vec{u} \ll c_0$   $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$   $\vec{B} = \frac{\mu_0 q u_z \sin \vartheta}{4\pi r^2} \vec{e}_\alpha = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \vec{u} \times \vec{e}_r$  (2.28, S.73)

diese Näherung erfüllt nicht immer die Maxwellgleichungen, vor allem 3.2. nicht

**Fazit:**  $\vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \vec{u} \times \vec{E}$  solange Bewegung gleichförmig **B** senkr. zu **E** (2.29, S.75)

relativistische Kraftwirkung zweier bewegter Teilchen siehe Buch S. 75, 76 (2.30, S.75)

**Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem (S.80f)**

Lorentz-Transformation mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}}}$  (2.32, S.81)

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \gamma(z - u_0 t) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{u_0}{c_0^2} z\right) \quad (2.35, S.81)$$

wenn  $\frac{u_0^2}{c_0^2} \ll 1$  d.h.  $\gamma \approx 1$   $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_0 \times \vec{B}$   $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \vec{u}_0 \times \vec{E}$  (2.34a,b, S.81)

Die Werte von **E** und **B** hängen davon ab, in welchem Bezugssystem sie gemessen werden.

Die Transformation erfolgt allgemein für **E**, **B** und **J** nach (S.80, S.81)

### 3. Maxwell'sche Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (3.1, \text{S.82}) \quad \oiint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_G \rho(\vec{r}, t) dV = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (3.41a, b, \text{S.105})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.2, \text{S.82}) \quad \oint_K \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = -\iint_S \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} \quad (3.42a, \text{S.106})$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.3, \text{S.82}) \quad \oiint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.43, \text{S.106})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \right] \quad (3.4, \text{S.82})$$

$$\oint_K \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left[ \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \epsilon_0 \iint_S \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} \right] \quad (3.44a, \text{S.106})$$

„**E** und **B** sind Vakuumgrößen; das Superpositionsprinzip ist eine Konsequenz der Linearität“

#### Quellen von E

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{wenn } q \subset S \\ 0 & \text{wenn } q \supset S \end{cases} \quad (3.5, \text{S.83}) \quad \text{Wichtig: } \operatorname{div}(\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) = 0 \quad (3.8, \text{S.85})$$

#### Wirbel von B

**Gesetz von Biot-Savart** 
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.10, \text{S.87})$$

Es gibt keine **B**-Komponenten parallel zu  $i$  ! Gesetz gilt nur im statischen und quasistationärem Fall !!

#### Ampere-Feld eines Drahtes endlicher Länge

$$\Delta \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[ \frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \vec{e}_\alpha$$

#### und unendlicher Länge

$$z_1 \rightarrow -\infty, z_2 \rightarrow \infty$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha \quad (3.11a, b, \text{S.88})$$

#### Unendliche Flächenladung (x-y-Ebene)

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad z >, < 0 \quad (3.70, \text{S.120})$$

#### Unendlicher Flächenstrom (x-y-Ebene, y-Richtg)

$$\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 K_y}{2} \vec{e}_x \quad z >, < 0 \quad (3.45, \text{S.112})$$

**Vektorpotential**  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.14a, \text{S.89}) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{\vec{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad (3.14b, \text{S.89})$

$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (3.18, \text{S.89}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} \quad (3.15, \text{S.89})$

für einen linienförmigen, geschlossenen Gleichstrom gilt:

$\nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (3.19, \text{S.90}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (3.20a, \text{S.90})$

#### Durchflutungsgesetz (S.93-95)

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (3.26, \text{S.95}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.27, \text{S.95})$$

Dieses Gesetz ist nicht richtig !! Aus ihm entstand Maxwell 4 s.o.; Ergebnis der Betrachtungen: **B** hat genau dort Wirbel, wo Ströme fließen und elektrische Felder sich zeitlich ändern. Vorsicht: Widerspricht auch endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit !



<b>Quellen von B</b>	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ (3.30, S.97)	$\text{div} \vec{B} = 0$ (3.31, S.97)
Es gibt keine magnetischen Ladungen !		

### Wirbel von E

Magnetischer Fluß  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$  (3.32, S.97)

$$\dot{\Phi} = \iint_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a} - \oint_K (\vec{u}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \dot{\Phi}^{(B)} + \dot{\Phi}^{(u)}$$
 (3.33, S.99)

wenn **B** sich ändert und K sich bewegt; oft muß das Ringintegral nicht ausgewertet werden (**B**=const), dann  $\Psi$  zeitl. ableiten

Es geht nur  $\dot{\Phi}^{(B)}$  ins Induktionsgesetz ein. Erst nach Verknüpfung mit dem **Ohmschen Gesetz für bewegte Leiter** geht auch  $\dot{\Phi}^{(u)}$  mit ein. Erst dann ist von ind. Strömen die Rede.

<b>Induktionsgesetz</b> (S.101f)	$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a}$ (3.40, S.102)	$\text{rot} \vec{E} = - \dot{\vec{B}}$ (3.2, S.82)
E hat genau dort Wirbel, wo sich magnetische Felder zeitlich ändern		

Je nach **Bezugssystem** ändern sich **E** und **B**,  $\Phi$  bleibt jedoch gleich, solange  $u \ll c_0$

$$\dot{\Phi}_\Sigma^{(u)} = \dot{\Phi}_\Sigma^{(B)}$$
 (Basis der Herleitung des Induktionsgesetzes) (3.38, S.102)

**Grenzbedingungen für E und B** (S. 112ff), Def: **n** zeigt von „-“ nach „+“

$$\text{Div} \vec{E} := \vec{n} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
 (3.48, S.114)

Die **Normalkomponente** der elektrischen Feldstärke an einer geladenen Fläche ist unstetig.

$$\text{Div} \vec{B} := \vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0$$
 da es keine magnet. Monopole gibt (3.53, S.115)

Die **Normalkomponente** des **B**-Feldes ist an allen Grenzflächen und unter allen Umständen stetig.

$$\text{Rot} \vec{B} := \vec{n} \times (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 \vec{K}$$
 (3.57, S.116)

$$\vec{t}_\perp \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 |\vec{K}|$$
 (3.59a, S.116)  $\vec{t}_\parallel \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0$  (3.59b, S.117)

Die zum Flächenstrom senkrechte **Tangentialkomponente** des **B**-Feldes ist unstetig an strombelegten Flächen, die parallele Tangentialkomponente dagegen stetig.

$$\text{Rot} \vec{E} := \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0}$$
 (3.64, S.117)

Alle **Tangentialkomponenten** des **E**-Feldes bezüglich einer Fläche sind dort stetig.

$$\text{Div} \vec{J} := \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = -\dot{\sigma}$$
 Analogon zur differentiellen Kontinuitätsgleichung (3.69, S.118)

In der Grenzfläche dürfen keine flächenhaften Ströme fließen, die in die Strombilanz miteinbezogen werden müßten.

Zusammengefaßt nach S. 118:

$$\text{Div} \vec{E} := \vec{n} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.65, S.118) \quad \text{Rot} \vec{E} := \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0} \quad (3.66, S.118)$$

$$\text{Div} \vec{B} := \vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (3.67, S.118) \quad \text{Rot} \vec{B} := \vec{n} \times (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 \vec{K} \quad (3.68, S.118)$$

$$\text{Div} \vec{J} := \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = -\dot{\sigma} \quad (3.69, S.118)$$

## 4. Elektrostatik

Wenn alle in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Größen zeitunabhängig sind:

<b>Statischer Fall</b>	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (4.1, S. 125)	$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (4.2, S. 125)	
mit $\rho = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}$	außerdem: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (S. 125 oben)	

<b>Elektrostatistisches Potential</b>	$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (4.3, S.125)	$\varphi(P) = -\int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$ (4.4, S.125)	
Grenzbedingungen:	$\varphi^+ = \varphi^-$ (stetig) (4.6, S.125)	$\vec{n} \cdot (\nabla^+ \varphi - \nabla^- \varphi) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (4.5, S.125)	

Kugelsymm. E-Feld  $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  ( $r_0 \rightarrow \infty$ ) (4.7b, S.126)  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$  (2.27, S.73)

Ansätze mit dE und dφ aus dem kugelsymmetrischen Feld !!

Linienladung  $\varphi(\rho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$  (4.8, S.127)  $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$  (4.9, S.127)

Elektrische Spannung  $U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$  (4.10, S.128)

Arbeit der elektrischen Kraft  $A_{el} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = qU_{12}$  (S.128 unten)

Verschiebungsarbeit von Außen aus  $\vec{F}_a + q\vec{E} = \vec{0}$  folgt:  $A_a = -A_{el} = q(\varphi(P_2) - \varphi(P_1))$  (4.11, S.128)

zum Vorzeichen: das System, von dem die Kraft stammt gibt Energie (z.B. als  $E_{\text{pot}}$ ) ab, dann ist  $A_{el} > 0$ , das System, auf das die Kraft einwirkt nimmt die Energie  $A_{el}$  (z.B. als  $E_{\text{kin}}$ ) auf

<b>Elektrischer Dipol</b>	$\vec{p} = q\vec{l}$	I zeigt von -q nach +q	(4.12, S.128)
---------------------------	----------------------	------------------------	---------------

Punktdipol  $\vec{p} = q\vec{l}$  wenn  $l \rightarrow 0$  und  $\vec{p} = \text{const}$  (4.14, S.130)

$\varphi(P) = \left\langle \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right\rangle_z = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (4.13, S.129)  $\vec{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$  (4.15, S.130)

Kraft und Drehmoment auf elektrischen Dipol im äußeren Feld

$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$  and. 1.60a,b, S. 47, R2 (4.17, S.132)

$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$  gilt unter statischen Bedingungen, d.h. wenn  $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$  (s.o) und  $\vec{p} = \text{const}$  gilt ! (A4.4, S.365)

$\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times \vec{E}$  erg. 1.60a,b, S.47, R2 (4.18, S.132)

Potentielle Energie eines Dipols in einem fremden, statischem el. Feld

$W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0)$  (A35)

Punktdipol im kugelsymmetrischen Feld

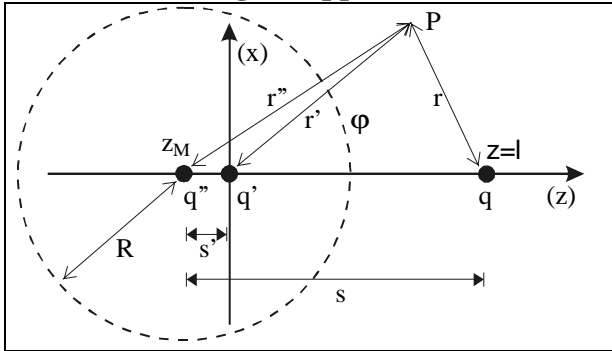
$\vec{F} = \frac{q\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$  wenn  $\xrightarrow{E} \downarrow p$  (S.133 unten)  $\vec{F} = -\frac{q\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r_0^3}$  wenn  $\xrightarrow{E} \xrightarrow{p}$  (A4.4a)

Multipolentwicklung des Potentials  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{v=1}^N \frac{q_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$  (4.20, S.135)

1. Näherung:  $Q = \sum_{v=1}^N q_v$  (4.23, S.136) 2. Näherung, Zusatz:  $\vec{p} = \sum_{v=1}^N q_v \vec{r}_v$  (4.24, S.136)

## Virtuelle Ladungen, Apolloniuskreise, Influenz,

Faßkreise = Äquipotentiallinien



$$q' = -\frac{R}{s}q \quad q' = -\frac{1}{k}q \quad k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

$$s s' = R^2 \quad s = \frac{k^2 l}{k^2 - 1} \quad s' = \frac{l}{k^2 - 1}$$

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad z_M = -s' = \frac{-l}{k^2 - 1}$$

$$Q_0 = q' + q'' \quad \Phi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R} + \frac{q}{s} \right)$$

unterschiedliche Betrachtungsweisen: Kugel isoliert: Gesamtladung  $Q_0 = \text{const}$ , oder durch Sp.quelle mit Fernkugel verb.  $\Phi_0 = \text{const}$ .

### Poissonsche Differentialgleichung

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Grenzbed. siehe links ! (4.25, S.136)

Vorraussetzung ist statisches Feld, d.h. 4.2, S.125, siehe links, muß unbedingt gelten.

### Lösung für eine im Endlichen liegende Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4.31, S.140) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (4.32, S.140)$$

folgt aus 4.7b mit dem  $d\varphi = f(dq)$  Ansatz; Flächenladung analog mit  $\sigma da$  !

### Eindeutigkeit der Lösung bei allgemeinen Potentialproblemen

Angenommen es gilt Gl. (4.34)  $\iiint_S (\tilde{\varphi} \nabla \tilde{\varphi}) \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \nabla \tilde{\varphi} \equiv \vec{0}$  (4.34, S.141)

Dann ist das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Hinreichende Bedingungen sind:

(a) Dirichletsche Randbedingung: Das Potential ist auf der Randfläche  $S$  vorgeschrieben. Dann muß dort  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  bzw.  $\varphi \equiv 0$  gelten, und Gl. (4.34) ist erfüllt.

(b) Neumannsche Randbedingung: Die **Normalkomponente** des Potentialgradienten ist auf  $S$  vorgeschrieben. Dann muß dort  $\nabla \varphi_1 \cdot \vec{n} da = \nabla \varphi_2 \cdot \vec{n} da$  bzw.  $\nabla \tilde{\varphi} \cdot \vec{n} da = 0$

(c) Das Potential soll einen **beliebigen**, aber **konstanten Wert auf  $S$**  haben. Gleichzeitig soll das über  $S$  erstreckte Hüllenintegral des Potentialgradienten einen vorgeschriebenen Wert besitzen. Dann muß auf der Randfläche sowohl

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const} \text{ als auch } \iiint_S \nabla \tilde{\varphi} \cdot d\vec{a} = \iiint_S (\nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2) \cdot d\vec{a} = 0 \text{ gelten, und Gl. (4.34) ist erfüllt.}$$

(d) Die Fläche  $S$  in Gl. (4.34) sei jetzt die **Fernkugel**. Das Potential soll dort mindestens wie  $1/r$  abnehmen. Folglich nimmt  $\vec{n} \cdot \nabla \varphi$  dort mindestens wie  $1/r^2$  ab. Da auch  $\tilde{\varphi}$  diese Forderung erfüllt, falls  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  das tun, und der Inhalt der Kugeloberfläche nur wie  $1/r^2$  zunimmt, geht die linke Seite der Gl. (4.34) mindestens wie  $1/r$  gegen Null, wenn sich  $S$  der Fernkugel nähert.

**Eine Lösung der Poissonschen DGL, welche eine der 4 genannten Randbedingungen erfüllt, ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, die bei der Berechnung von  $E$  keine Rolle spielt.**

2 Potentialprobleme sind gleich, wenn ihre DGL und ihre Randbedingungen gleich sind. Wichtige Anwendung: Faraday-Käfig

**Energie des E-Feldes:** (innere potentielle Energie, bzw. von außen aufzubringende Arbeit)

Allg.:  $A_a = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N q_v \varphi_v$  (4.47, S.152)  $A_a = W = \frac{1}{2} \left[ \iiint_G \varphi \rho dV + \iint_S \varphi \sigma da \right]$  (4.51, S.153)

für räumlich und flächenhaft verteilte Ladungen

speziell bei einer homogenen Kugelladung  $W = \frac{3}{5} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  (S.154 Mitte)

Räuml. Energiedichte des E-Feldes  $w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$  (4.53, S.154)  $W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Raum}} \vec{E}^2 dV$  (4.55, S.155)

## 5. Metallische Leiter

**Ohmsches Gesetz**  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$  falls ruhend! (5.5, S.157)  $\kappa = enb$  bei  $e^-$  (el. Leitfähigkeit)(5.4, S.157)

Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter im **B** Feld  $\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$  für  $\vec{u}^2 \ll c_0^2$  (5.6, S.158)

gerne benutzt:  $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \vec{u} \times \vec{B}$  bei  $e^-$ :  $\vec{J} = \kappa \vec{E} - b(\vec{J} \times \vec{B})$  (5.7, S.158)  $|\vec{J}|^2 = \kappa \vec{E} \cdot \vec{J}$  (5.8, S.158)

bei  $e^-$  bedeutet: bei ausschließlicher Elektronenleitung!

U=IR gilt bei bewegten Leitern nicht mehr!!!

**Driftgeschwindigkeit, Stromdichte und Kraft für Elektronen**

$$\vec{J} = -en\vec{u}_D \quad (5.1, S.156) \quad \vec{u}_D = \frac{b}{e} \vec{F} \quad (5.2, S.157) \quad \vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{u}_D \times \vec{B}) \quad (5.3, S.157)$$

zu Hall-Effekt siehe UNBEDINGT Anhang C, Räumliches: Bemerkungen zum Halleffekt!

**Hall-Effekt** wenn nur Elektronen zur Leitfähigkeit beitragen: wegen der  $e^-$  entsteht an bestimmten Stellen das „-“

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{\kappa} \vec{J} \quad (5.9a, S.158) \quad \vec{E}_\perp = \frac{b}{\kappa} (\vec{J} \times \vec{B}) = -(\vec{u}_D \times \vec{B}) = \langle R_H B_z J_x \vec{e}_y \rangle \quad (5.9b, S.159)$$

Das Auftreten dieser senkrechten Komponente wird Hall-Effekt genannt  $\rightarrow E_\perp$  heißt „Hall-Feld“

$$R_H = -\frac{b}{\kappa} = \frac{1}{-en} = \left[ \frac{m^3}{As} \right] \quad (5.10, S.159) \quad U_H = \langle R_H B_z J_x l \rangle \quad (5.12, S.159)$$

Vorzeichen von  $U_H$  und  $R_H$  je nach Art der Ladungsträger

Hallwinkel  $\beta_H$ : ist definiert als Winkel zwischen **J** und **E**, also allgemein  $\cos \beta_H = \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{|\vec{J}| |\vec{E}|}$  (Def. S.159ob)

oft, aber nicht immer (Anordnung!) gilt  $\tan \beta_H = \frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_\parallel|}$  z.B. (5.11b, S.159) oder  $\tan \beta_H = \frac{|\vec{J}_\perp|}{|\vec{J}_\parallel|}$  z.B. (A5.1)

**Joulesche Wärme:** Leistungsdichte  $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$  (5.13, S.161)  $p = \frac{1}{\kappa} |\vec{J}|^2$  (5.14, S.161)  
allgemein für ohmschen Leiter, auch bei Hall-Effekt

### Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen

stationär:  $\text{div} \vec{J} = 0$  (5.15, S.161) nicht Stationär:  $\text{div} \vec{J} = -\dot{\rho}$

**Laplace-Gleichung**  $\nabla^2 \varphi = 0$  in Bereichen konstanter Leitfähigkeit (5.17, S.162)  
 $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  zwischen den Elektroden

### Grenzflächen zwischen verschiedenen Leitfähigkeiten

$$\text{Div} \vec{J} = \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = 0 \quad (5.22, S.164) \quad \text{daraus folgt: } \vec{n} \cdot (\kappa^+ \vec{E}^+ - \kappa^- \vec{E}^-) = 0$$

Die Normalenkomponente stationärer Stromdichten ist an Grenzflächen stetig, die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt. Es existieren Flächenladungen nach (3.65, S.118).

$$\vec{t} \cdot \left( \frac{1}{\kappa^+} \vec{J}^+ - \frac{1}{\kappa^-} \vec{J}^- \right) = 0 \quad (5.23, S.164) \quad \text{Grenzbedingungen: } \frac{J_n^+}{\kappa^+} = \frac{J_n^-}{\kappa^-} \quad \frac{J_t^+}{\kappa^+} = \frac{J_t^-}{\kappa^-} > 0$$

Die Tangentialkomponenten von **J** sind unstetig, da die Tangentialkomp. des **E**-Feldes nach (3.66, S.118) unbedingt stetig sind.

**Brechungsgesetz der Stromlinien**  $\tan \beta^+ = \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \tan \beta^-$  (5.24, S.164)

Dort, wo  $\kappa$  örtlich nicht konstant ist, können Ladungen sitzen. Dagegen ist jeder Homogenitätsbereich von  $\kappa$  ladungsfrei.  
In einen idealen Leiter treten die Stromlinien senkrecht ein.

<b>Ohmscher Widerstand</b>	$U = RI$ (5.33, S.168)	$P_{Joule} = \iiint_V \frac{1}{\kappa} \vec{J}^2 dV = RI^2$ (5.34, S.168)
----------------------------	------------------------	---

zylindrisch	$R = \frac{l}{\kappa a}$ (5.35, S.169)	krummer Quader	$R = \frac{\alpha_0}{\kappa h \ln\left(1 + \frac{h}{\rho_0}\right)}$ (S. 171, Mitte)
-------------	--	----------------	--

**Stromlos ruhende Metallkörper, Influenzeffekt**

innerhalb stromlos ruhender Leiter  $\vec{E} = 0$  wegen  $\vec{J} = 0$  (5.37, S.171)

wegen  $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ,  $div(rot(...))=0$  mit  $\vec{J} = \kappa \vec{E}$

und  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  schließlich die Raumladungsfreiheit:  $\rho = 0$  nach Krass

innerhalb des metallischen Bereiches,  $q$  erzeugt ein äußeres E-Feld,  $\sigma$  wird dadurch beeinflusst

$$\vec{E}^{(q)} + \vec{E}^{(\sigma)} = 0 \quad (5.38, S.172)$$

Grenzbedingung an Metalloberflächen  $\vec{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}(P)$  (5.40, S.173)

Das Feld tritt also immer senkrecht in den metallischen Leiter ein.

**Prinzip der fiktiven oder virtuellen Spiegelladung (S.173ff)** Spiegelladung bestimmen, E-Feld außerhalb des metallischen Bereiches berechnen, E in der Nähe des metallischen Bereiches  $\rightarrow \sigma$  nach (5.40, S.173)

**Mehrleitersysteme**

Potentiale  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  von 3 Leitern mit  $Q_1, Q_2, Q_3$  beliebig vorgegeben (und umgekehrt)

Dirichletsche Randwertaufgabe, eindeutige Lösung  $\varphi$  im ladungsfreien Raum

*Zwischen den Potentialen der drei Leiter und ihren Ladungen besteht eine eindeutige Zuordnung*

Potential- und Kapazitätskoeffizienten

$$\Phi_v = \sum_{\mu=1}^3 p_{v\mu} Q_\mu \quad (5.46, S.180) \quad Q_v = \sum_{\mu=1}^3 c_{v\mu} \Phi_\mu \quad (5.47, S.180)$$

Symmetrie, Reziprozität  $p_{v\mu} = p_{\mu v}$  (5.53, S.182)  $c_{v\mu} = c_{\mu v}$  (5.54, S.182)

Wichtige Eigenschaften  $c_{vv} > 0$   $c_{v\mu} < 0$   $\sum_v c_{v\mu} > 0$  (5.56, S.184)

2-Leitersystem  $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$  (5.61, S.187)  $p_{11} > 0, p_{22} > 0, p_{12} = p_{21} > 0$  (5.62a, S.187)

$p_{11}, p_{22} > p_{12}$  (5.62b, S.187)  $p_{11} + p_{22} - 2p_{12} > 0$  (5.62c, S.187)

Umkehrungssatz:  $Q_1 \tilde{\varphi}_1 + Q_2 \tilde{\varphi}_2 + Q_3 \tilde{\varphi}_3 = \tilde{Q}_1 \varphi_1 + \tilde{Q}_2 \varphi_2 + \tilde{Q}_3 \varphi_3$  aus Klausur April '96

Diese Beziehung zwischen 2 Betriebszuständen (mit und ohne  $\sim$ ) einer Anordnung gilt wegen der Reziprozität.

Wenn Zustände beliebig wählbar sind, dann diese Variablen ausklammern. Die Klammerausdrücke müssen einzeln Bed. erfüllen !

**Energie eines Mehrleitersystems**

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_G \vec{E}^2 dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \iint_S \varphi \vec{E} d\vec{a} \quad (5.58, S.186) \quad W = Q_1 U_{10} + Q_2 U_{20} + Q_3 U_{30} + \dots \quad (5.59, S.186)$$

Kondensatoren  $Q = CU$  (5.63, S.187)  $W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$  (5.66, S.189)

Plattenkondensator  $C = \epsilon_0 \frac{a}{l}$  (5.67, S.191) Kugelkondensator  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}$  (5.68, S.192)

## 6. Magnetostatik

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.1, \text{S.194}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (6.2, \text{S.195})$$

Ursache des magnetostatischen Feldes sind stationäre d.h. quellenfreie und zeitunabhängige Ströme

$$\text{Vektorpotential} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Phi = \oint_K \vec{A} d\vec{r} \quad (6.3a,b, \text{S.194}) \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (6.4, \text{S.195})$$

Stromdurchflossener Draht  $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$  (3.11b, S.88)  $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$  (S.195 unten)

**Differentialgleichung für das Vektorpotential**  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$  (6.7, S.197)

**Lösung für eine im Endlichen liegende Stromverteilung:**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (6.10, \text{S.197}) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.12a,b, \text{S.198})$$

mit dem Zusammenhang:  $\vec{J}(\vec{r}) dV = \vec{K}(\vec{r}) da = i d\vec{r} = \rho dV \vec{u} = dq \vec{u}$  (Stromelemente) (6.13, S.198)

**Gesetz von Biot-Savart**  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV,$  and. (3.10b, S. 87) (6.14, S.198)

**Magnetischer Dipol** (S. 200ff), magnetisches Dipolmoment  $\vec{m} = ia\vec{n}$  (6.21, S.202)

magnetischer Punktdipol  $a \rightarrow 0$  aber  $\vec{m} = ia\vec{n} = \text{const}$  (6.22, S.203)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r^2} \vec{e}_\alpha \quad (6.23, \text{S.203}) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad (6.24, \text{S.203})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2} \quad (6.25, \text{S.203}) \quad 6.23 \text{ bis } 6.25 \text{ gelten nur für den Punktdipol exakt !}$$

Kräfte  $d\vec{F} = dQ(\vec{u} \times \vec{B}) = i d\vec{r} \times \vec{B}$  partielle Kräfte aus Lorentzschem Kraftgesetz (6.26, S.204)

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.28, \text{S.205}) \quad \text{magnetostatisch:} \quad \vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6.30, \text{S.205})$$

Sonderfall: Wenn  $\vec{m} \rightarrow \leftarrow \vec{B}$  feld(anti-)parallel, dann  $\vec{F} = \pm |\vec{m}| (\nabla |\vec{B}|)_{P_0}$  (6.31, S.206)

**Drehmomente**

allg:  $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{m} \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \vec{B}$  In homogenen B-Feldern:  $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$  (A6.1, S.368)

Bei den Kräften und Drehmomenten sind immer die externen, äußeren Felder gemeint !!!

$$\oint d\vec{r}' = 0 \quad \text{Verschwindet eine Gesamtkraft, so ist das Drehmoment unabhängig von einem Bezugspunkt}$$

**Induktivitätskoeffizienten** S.207

$$\text{aus } \vec{B} = \vec{B}^{(i)} + \vec{B}_{\text{fremd}} \quad \text{und} \quad \Phi = \iint_S \vec{B}^{(i)} \cdot d\vec{a} + \iint_S \vec{B}_{\text{fremd}} \cdot d\vec{a} = \Phi^{(i)} + \Phi_{\text{fremd}} \quad \text{folgt die}$$

**Selbstinduktivität**  $\Phi^{(i)} = Li$  (6.32, S.208)

Torusförmige Spule innen:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$  (S.210 Mitte)  $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} l \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$  (6.33b, S.210)

## Wechselseitige Induktivitäten

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \quad \Phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \quad \Phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \quad (6.36, S.212)$$

Neumannsche Formel  $M_{\nu\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_\nu} \oint_{K_\mu} \frac{d\vec{r}_\mu \cdot d\vec{r}_\nu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|} \quad (6.37, S.212) \quad M_{\nu\mu} = M_{\mu\nu} \quad (6.40, S.213)$

Direkte Berechnung im allgemeinen zu schwierig !! Berechnung der Koeffizienten im allgemeinen viel einfacher mit:

$$\Phi_\nu^{(\mu)} = \iint_{S_\nu} \vec{B}^{(\mu)} \cdot d\vec{a}_\nu \quad (6.39, S.213) \quad \text{oder} \quad L := \frac{2W}{I^2} \quad \text{Definitionsgleichung !} \quad (S.233\text{oben})$$

von Stromschleife  $\mu$  erzeugte, von Stromschleife  $\nu$  rechtehändig umfaßter Fluß

## Quasistatische Elektrodynamik (S. 217ff)

Bedeutung der Indizes: „C“ Coulomb-Gesetz, „BS“ Biot-Savart-Gesetz, „s“ statisch berechnet

### div und rot wirken nicht auf t

$$\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (6.45, S.217) \quad \text{div } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (6.46, S.217)$$

$$\text{div } \vec{B}_{BS}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.47, S.217) \quad \text{rot } \vec{B}_{BS} = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}_C(\vec{r}, t) \right] \quad (6.51, S.217)$$

$$\text{formgleich zur Lorentz-Beziehung:} \quad \text{div } \vec{A}_s(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \dot{\varphi}_s(\vec{r}, t) \quad (6.50, S.217)$$

Die Felder  $\vec{E}_C, \vec{B}_{BS}$  befriedigen also die Maxwell-Gleichungen (3.1), (3.3), (3.4). Nur dem Induktionsgesetz (3.2) gehorchen sie im allgemeinen nicht, und sind daher natürlich auch nicht die Lösung dieses Gleichungssystems im allgemeinen dynamischen Fall.

Ausnahme: „fast statische Bedingung“  $\dot{\vec{J}} \equiv \vec{0}$  und  $\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \neq 0$  (6.52, S.218)

### Quasistationäre Näherung (langsam zeitveränderliche Stromverteilungen)

Das Feld  $E_{ind}$  wird hinzugefügt, damit das Induktionsgesetz gilt. Vernachlässigt wird hier aber der induzierte Anteil der Verschiebungsstromdichte, nicht jedoch ihr coulombscher Anteil !

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_{ind} \quad (6.56a, S.219) \quad \vec{B} = \vec{B}_{BS} \quad (6.56b, S.219)$$

mit  $\vec{E}_{ind}(\vec{r}, t) := -\vec{A}_s(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  als der korrigierende „induzierte el. Feldstärke“ (6.55, S.218)

Potentialbeziehungen  $\vec{E}_C = -\nabla \varphi_s \quad \vec{E}_{ind} = -\dot{\vec{A}}_s \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}_s \quad (6.57, S.219)$

„mod. Maxwell-DGL“  $\text{div } \vec{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (6.58, S.219)$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}_C) \quad (6.59, S.219)$$

$$\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \quad \text{die Kontinuitätsgleichung ist immer noch erfüllt} \quad (S.219 \text{ Mitte})$$

$$\text{div } \vec{E}_{ind} = -\text{div } \dot{\vec{A}}_s = \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\varphi}_s \quad \text{ist im allgemeinen nicht mehr quellenfrei} \quad (6.60, S.219)$$

### Satz von Helmholtz S.219f

Die Darstellung (6.61, S.219) eines Vektorfeldes durch seine Quellenverteilung  $u$  und Wirbelverteilung  $w$  wird Satz von Helmholtz genannt oder Hauptsatz der Vektoranalysis.

## 7. Induzierte quasistationäre Ströme

Die Bedingung  $l_{\max} \ll \chi = \frac{2\pi c_0}{\omega}$  präzisiert, wann die quasistationäre Näherung anwendbar ist.

**Gegeninduktion:** wechselseitige Beeinflussung der Ströme

**Selbstinduktion:** Rückwirkung der Ströme auf sich selbst

Vorbemerkung:  $\vec{J} = \frac{i}{a} \frac{d\vec{r}}{ds}$  in Leitern mit konstantem Querschnitt (7.4, S.224)

### Induzierte Schleifenströme:

Spannung (immer zwischen 2 Raumpunkten) und Umlaufspannung  $\dot{U}$  sind komplementäre Begriffe

$$-\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} \quad \text{Vorsicht Vorzeichen!} \quad (7.3a, S.222)$$

$$\dot{U} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = i \oint_K \frac{ds}{\kappa a} = \dot{R}i \quad (7.5, 7.6, S.224) \quad \dot{R}i = -\dot{\Phi}^{(B)} \quad (7.7, S.225)$$

K: Integration in **i-Richtung**, homogenes **J** vorausgesetzt

bei stehender Leiterschleife

Nur der Anteil  $\vec{E}_{\text{ind}}$  bringt einen von null verschiedenen Wert in den Ringintegralen, denn nur dieser ist verwirbelt. Die Ringintegrale haben die Dimension einer Spannung, sind aber Umlaufspannungen. Die Spannung wird hier wegabhängig!

Selbstinduktion und wechselseitige Induktion bei 2 Stromschleifen S. 225f

Man siehe da vor allem aus Bild 7.2, S.226 die Richtungen von  $i$ ,  $di/dt$ , und  $d\vec{B}/dt$  zueinander!

### Energie des B-Feldes (S. 228ff)

Bei 1 Stromschleife

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = -L \frac{di}{dt} \quad (7.9, S.228) \quad W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (7.12, S.229)$$

Bewegung der Ladungsträger gegen die Kraft, die das induzierte Feld auf sie ausübt

Bei 3 Stromschleifen

mit  $L_v = L_{vv}, M_{v\mu} = L_{v\mu}$  folgt:  $\oint_{K_v} \vec{E} \cdot d\vec{r}_v = -\sum_{\mu=1}^3 L_{v\mu} \frac{di_\mu}{dt}$  (7.14, S.230)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 L_{v\mu} i_v i_\mu = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3 \quad (7.16, S.230)$$

Zylinderspule  $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{l}$  (7.17b, S.231)

### Räumliche Energiedichte

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (7.18, S.232) \quad W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Raum}} \vec{B}^2 dV \quad (7.19, S.232)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Raum}} (\vec{A} \cdot \vec{J}) dV \quad (7.20, S.232) \quad W = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2 + i_3 \Phi_3) \quad (7.21, S.232)$$

bei einer dreischleifigen Anordnung



## Koaxialleitung

$$\text{Induktivität: } L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) l \quad (7.22a, \text{ S.233})$$

$$\text{Induktivitätsbelag } \bar{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \bar{L}_i + \bar{L}_a \quad (7.22b, \text{ S.234})$$

## Strom-Spannungs-Beziehung bei Spule und Trafo

$$\text{Spule } U = L_{sp} \frac{di}{dt} \quad \text{bei höheren Frequenzen noch Streukapazitäten} \quad (7.35, \text{ S.237})$$

Physikalische Interpretation S. 237

$$\text{Trafo } U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad U_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (7.36, \text{ S.239})$$

$$\text{allg: } \underline{L_1 L_2 \geq M^2} \quad (7.37, \text{ S.239}) \quad \text{Feste Kopplung} \quad L_1 L_2 = M^2 \quad (7.38, \text{ S.239})$$

$$\text{bei fester Kopplung ist die Übersetzung} \quad \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (7.40, \text{ S.239})$$

## Induktion in bewegten Leitern

$$\text{Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter} \quad \vec{J} = \kappa \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (5.6, \text{ S.158})$$

## Bewegte Leiterschleifen

*Faradaysche Flußregel* (7.45)

$$\oint_K \vec{J} \cdot d\vec{r} = \dot{R}i = \oint_K (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7.44, \text{ S.244}) \quad \oint_K (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\dot{\Phi}^{(\vec{B})} - \dot{\Phi}^{(u)} = -\dot{\Phi} \quad (7.45, \text{ S.244})$$

$$\text{also: } \dot{R}i = -\dot{\Phi} \quad \text{mit dem kompletten Fluß} \quad \dot{\Phi} = \dot{\Phi}^{(\vec{B})} + \dot{\Phi}^{(u)} \quad (7.46, \text{ S.244})$$

$$\dot{\Phi}^{(\vec{B})} = \iint \dot{\vec{B}} d\vec{a} \quad (3.34a, \text{ S.99}) \quad \dot{\Phi}^{(u)} = -\oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (3.34b, \text{ S.99})$$

dies ist eine Verallgemeinerung von (7.7, S.225, siehe links), es reicht den kompletten Fluß nach der Zeit abzuleiten

$$\text{interessante Beziehung: } iR - U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{R. fragen ob immer gültig !!!}$$

$$\text{nicht vergessen: } R = \frac{l}{\kappa A} \quad \vec{J} = \kappa \frac{R \cdot i}{l} \vec{e}_i = \frac{i}{a} \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{Stromdichte zeigt in Richtung des Stromes}$$

$$\text{Wenn sich L bewegt und seine Form ändert} \quad \dot{\Phi} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \dot{\Phi}_{fremd} \quad (7.47, \text{ S.244})$$

Gutes Beispiel zur Asynchronmaschine S.245

$$\text{Homogenes B-Feld } \vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

**Anmerkungen zu** - Wirbelströme, - mögliche Fehler, - Lenzsche Regel (S.247)

## 8. Elektrisch polarisierbare Stoffe

<b>Elektrische Polarisation</b>	$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ (8.1, S.248)	$d\vec{p} = dQ\vec{l}$ mit $dQ = N(-e)$ (8.2, S. 249)	
	$\rho_0 = \frac{dQ}{dV}$ (8.3, S.249)	$\vec{P} = \rho_0\vec{l}$ (8.4, S.249)	

**l** : kleinräumige Ladungverschiebung, Verbindung von Polarisation und Dipolmoment durch 8.1 !

In Leitern  $\kappa = \text{endlich}$   $P = 0$       In Nichtleitern  $\kappa = 0$        $P = \text{endlich}$

### Polarisationsladungen

Grundlage: 
$$-Q_{\text{versch}} = -\iiint_S \vec{P} d\vec{a} = -\iiint_{G \text{ von } S} \text{div}(\vec{P}) dV = \iiint_{G \text{ von } S} \rho_{\text{pol}} dV = Q_{\text{pol}} \quad (8.7f, S.250)$$

Folgerung: 
$$\text{div } \vec{P} = -\rho_{\text{pol}} \quad (8.8, S.251) \qquad \sigma_{\text{pol}} = \frac{dQ_{\text{versch}}}{da} \quad (8.9, S.251)$$

**n** ist immer die äußere Flächennormale !

$$\sigma_{\text{pol}} = \sigma_{\text{pol}}^+ + \sigma_{\text{pol}}^- \quad (8.10, S.252) \qquad \text{Div } \vec{P} = \vec{n} \cdot (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) = -\sigma_{\text{pol}} \quad (8.11, S.253)$$
  
+ und - bzgl. der Seiten und **n**      Grenzbedingung !

Es geht hier um makroskopische Beziehungen, d.h. Quantenphänomene nicht beachtet !

$\vec{E}^{(pol)}$  ist im Medium der Polarisation logischerweise entgegengerichtet (**P** zeigt von - nach +, **E** von + nach -).  
Es kann aus  $\sigma_{\text{pol}}$  berechnet werden. Es wird daher oft auch depolarisierendes oder entelektrisierendes Feld genannt.

Homogen polarisierte Kugel im Innern 
$$\vec{E}^{(pol)} = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0} \quad (8.13; S.254)$$

### Polarisationsstrom (S.255)

$$\vec{J}_{\text{pol}} = \rho_0 \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{P}} \quad (8.15, S.255) \qquad \text{div } \vec{J}_{\text{pol}} + \dot{\rho}_{\text{pol}} = 0 \quad (8.16, S.255)$$

Der Polarisationsstrom erfüllt für sich alleine schon eine Kontinuitätsgleichung.

### Freie Ladungen $Q_f$ bzw. $\sigma_f$ und die Verschiebungsdichte **D**

mit  $\rho_f + \rho_{\text{pol}} = \rho \quad (8.17, S.256) \qquad \sigma_f + \sigma_{\text{pol}} = \sigma \quad (S.257, \text{unten})$

folgt  $\epsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho_{\text{pol}} + \rho_f \quad (8.18a, S.256) \quad \text{also} \quad \epsilon_0 \text{div}(\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad (8.18b, S.256)$

und mit  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (8.20, S.257) \qquad \vec{J} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{pol}} \quad (S.256 \text{ unten})$

dann  $\text{div } \vec{D} = \rho_f \quad (8.21, S.257) \qquad \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \quad (8.22, S.257)$

oder  $\iiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f \quad (8.23, S.257) \qquad \oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -\epsilon_0 \dot{\Phi}^{(B)} + \oint \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (8.24, S.257)$

Hier sind immer die Gesamtfelder in einem Punkt gemeint !

D ist die elektrische Verschiebungsdichte, selbst im statischen Fall hat **D Wirbel** (die von P), ist also global kein Gradientenfeld.

<b>Grenzbedingungen</b>	$\epsilon_0 \text{Div } \vec{E} = \sigma_{pol} + \sigma_f$	(8.25, S.257)
$\text{Div } \vec{D} = \vec{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \sigma_f$	(8.26, S.257)	$\text{Rot } \vec{D} = \text{Rot } \vec{P} = \vec{n} \times (\vec{P}^+ - \vec{P}^-)$
		(8.27, S.257)

Im Inneren eines stromlosen (und ruhenden) Metallkörpers

aus  $\vec{E} = \vec{0}$  und  $\vec{P} = \vec{0}$  folgt  $\vec{D} = \vec{0}$  und damit  $\vec{n} \cdot \vec{D}^+ = \sigma_f$  (8.28, S.258)

Homogen polarisierte Kugel:  $\vec{E}^{(pol)} = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0}$  in der Kugel ! (8.13a, S. 254)

$\vec{D}^{(pol)}$  hat flächenhafte Wirbel auf der Kugel nach (Bsp. 8.4.1)

### Elektrische Materialgrößen

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (8.31, S.259) \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (8.32, S.259)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (8.32, S.260)$$

$\chi_e$  el. Suszeptibilität  $\epsilon_r$  Permittivitätszahl, relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  Permittivität  
(Dielektrizitätskonstante)

In der Regel gilt innerhalb dielektrischer Bereiche

$$\rho_f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \text{div } \vec{D} = \epsilon \text{div } \vec{E} = \epsilon_r \rho_{pol} \quad \text{d.h. Polarisationsladungen nur auf der Oberfläche}$$

### Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika

S. 259

$\text{Div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{pol}$	für $\sigma_f = 0$	(8.34, S.261)	$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0}$	(8.35, S.261)
$\text{Div } \vec{D} = 0$	für $\sigma_f = 0$	(8.36, S.261)	$\text{Rot } \vec{D} = \text{Rot } \vec{P}$	(8.37, S.361)

vereinfacht, wobei **n** immer von der „-“ Seite zur „+“ Seite zeigt, ergibt sich:

$$D_n^+ = D_n^- \quad \text{für } \sigma_f = 0 \quad (8.39, S.261) \quad E_t^+ = E_t^- \quad (8.38, S.261)$$

oder gleichwertig

$$\epsilon_+ E_n^+ = \epsilon_- E_n^- \quad \text{für } \sigma_f = 0 \quad (8.41, S.261) \quad \frac{D_t^+}{\epsilon_+} = \frac{D_t^-}{\epsilon_-} \quad (8.40, S.261)$$

Hieraus läßt sich wieder ein **Brechungsgesetz** ableiten

Beispiele zu Plattenkondensatoren S.262ff

# 9. Magnetisch polarisierbare Stoffe

Amperesche Kreisströme: - Umlaufbewegung und Spin der Elektronen → Gesamtmoment

Paramagnetismus: - mikroskopische Permanentmagneten  $I_{mag} \uparrow \uparrow I_f$   
 $\chi_m > 0$  - Elektronenspin stark überwiegend; wirkt verstärkend

Diamagnetismus: - kein permanentes magn. Moment  $I_{mag} \uparrow \downarrow I_f$   
 $\chi_m < 0$  - Umlaufspin überwiegt; wirkt schwächend

Ferromagnetismus: - kollektives Phänomen  
 $\chi_m \gg 0$  - Irreversible Vorgänge  
 - Permanentmagneten  
 - Curie-Temperatur (Ferromagnetismus -> Paramagnetismus)  
 - Blochwände und Weißsche Bezirke

**Magnetisierung**  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$  (9.1, S.275)

Verbindung von magnetischem Moment und

Magnetisierung

## Magnetisierungsströme

punktweise  $\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M}$  (9.4, S.277)

global  $\oint_K \vec{M} \cdot d\vec{r} = I_{mag}$  (9.7, S.278)

die Wirbel der Magnetisierung sind gleich den Magnetisierungsströmen

$I_{mag}$  ist die gesamte Stärke der Magnetisierungsströme durch eine von K berandete, ansonsten beliebige Kontrollfläche

Quellenfreiheit  $\text{div } \vec{J}_{mag} = 0$  (9.8a, S.278)  $\overset{\circ}{I}_{mag} = 0$  (9.8b, S.278)

der gesamte Mag.-strom durch eine *Hüllfläche*

Grenzbedingung  $\text{Rot } \vec{M} = \vec{n} \times (\vec{M}^+ - \vec{M}^-) = \vec{K}_{mag}$  (9.6, S.277)

$\vec{n}$  zeigt immer von der „-“ Seite zur „+“ Seite

## Freie Ströme und magnetische Feldstärke

S. 281

mit  $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$  (9.11, S.280)  $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J}_{mag} + \vec{J}_f + \vec{J}_{pol} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$  (9.12, S.281)

und  $\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  (9.14, S.281)

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$

gilt bei linear magnetisierbaren Stoffen

es folgen aus 9.14 die Wirbel und Quellen von **H**

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}}$  (9.15, S.281)

$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_f + \iint_K \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{a}$  (9.16a, S.281)

$\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$  (9.17a, S.281)

$\oiint \vec{H} \cdot d\vec{a} = -\oiint \vec{M} \cdot d\vec{a}$  (9.17b, S.281)

mit  $\vec{K} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$  und  $\frac{1}{\mu_0} \text{Rot } \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$  (9.18, S.282)

folgen die Grenzbedingungen für H, siehe rechts. Man beachte und untersuche immer, ob die freien oder die gesamten Ströme gegeben und gesucht sind !

## Grenzbedingungen für $\mathbf{H}$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{K}_f \quad (9.19, \text{S.282}) \qquad \text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M} \quad (9.20, \text{S.282})$$

Bei **leeren Spulen** würde nur  $\mathbf{B}$  herrschen. Von  $\mathbf{H}$  gehen **keine Kräfte** aus, nur von  $\mathbf{B}$  !  $\mathbf{H}$  ist nur ein **Hilfsfeld** !  
 $\mathbf{H}$  kann nicht aus einem Vektorpotential abgeleitet werden !

Torusspule  $\vec{H} = \frac{Ni}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$       innerhalb; außerhalb  $H=0$       (9.22, S.283)

Zylinderspule (sehr lang)  $\vec{B} = \mu_0 K_\alpha \vec{e}_z$       *innen*,  $B=0$       *außen*

## Magnetische Materialgrößen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (9.24b, \text{S.285}) \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (9.26, \text{S.285})$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \qquad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (9.25, \text{S.285})$$

$$\chi_m > 0 \text{ paramagnetischer Stoff} \qquad \chi_m < 0 \text{ diamagnetischer Stoff}$$

mit  $\chi_m$  magnetische Suzeptibilität       $\mu$  Permeabilität       $\mu_r$  relative Permeabilität bzw. Permeabilitätszahl

## Grenzflächen zwischen verschiedenen permeablen Bereichen

$$\text{Rot } \vec{H} = 0 \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.28, \text{S.286}) \qquad \text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M} \quad (9.27, \text{S.286})$$

$$\text{Rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{mag} \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.30, \text{S.286}) \qquad \text{Div } \vec{B} = 0 \quad (9.29, \text{S.286})$$

vereinfacht ergibt sich dann:

$$H_t^+ = H_t^- \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.31, \text{S.287}) \qquad \mu_+ H_n^+ = \mu_- H_n^- \quad (9.34, \text{S.286})$$

$$\frac{B_t^+}{\mu_+} = \frac{B_t^-}{\mu_-} \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.33, \text{S.287}) \qquad B_n^+ = B_n^- \quad (9.32, \text{S.286})$$

Hieraus läßt sich wieder ein **Brechungsgesetz** für die Feldlinien ableiten.

## Magnetisierungskurve

$$\vec{B} = \mu(\vec{H})\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(mag)} \quad (9.39, \text{S.293}) \qquad L = \mu_r L_0 \quad (9.41, \text{S.295})$$

## Anmerkungen:

Vorsicht ! Dies sind Näherungen.

Ströme in ohmschen Leitern  $\text{rot } \vec{H} = \kappa \vec{E}$       gilt näherungsweise, siehe dazu      (9.42, S.296)

in weichmagnetischen Leitern  $\vec{J}_{mag} = (\mu_r - 1)\vec{J}_f = (\mu_r - 1)\kappa \vec{E}$       gilt näherungsweise      (9.43, S.296)

## Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen mit D und H

### Definitionen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9.44, \text{S.296}) \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (9.45, \text{S.296})$$

$$\rho = \rho_{pol} + \rho_f \quad (8.17, \text{S.256}) \qquad \vec{J} = \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_f \quad (9.11, \text{S.280})$$

### Die üblichen Maxwell-Gleichungen

$$div \vec{D} = \rho_f \quad (9.46, \text{S.296}) \quad \text{statt:} \quad div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1, \text{S.82})$$

$$rot \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (9.47, \text{S.296}) \quad \text{bleibt}$$

$$div \vec{B} = 0 \quad (9.48, \text{S.297}) \quad \text{bleibt}$$

$$rot \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}} \quad (9.49, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad rot \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \right] \quad (3.4, \text{S.82})$$

### Die transformierten Grenzbedingungen

$$Div \vec{D} = \sigma_f \quad (9.50, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad \epsilon_0 Div \vec{E} = \sigma_{pol} + \sigma_f \quad (8.25, \text{S.257})$$

$$Rot \vec{E} = \vec{0} \quad (9.51, \text{S.297}) \quad \text{anders} \quad Rot \vec{D} = Rot \vec{P} = \vec{n} \times (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) \quad (8.27, \text{S.257})$$

$$Div \vec{B} = 0 \quad (9.52, \text{S.297}) \quad \text{anders} \quad Div \vec{H} = -Div \vec{M} \quad (9.27, \text{S.286})$$

$$Rot \vec{H} = \vec{K}_f \quad (9.53, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad \frac{1}{\mu_0} Rot \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f \quad (9.18, \text{S.282})$$

### Materialgleichungen

$$\vec{J}_f = \kappa(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (9.54, \text{S.297})$$

bei linear polarisierbaren Stoffen gelten weiterhin

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{für ruhende Leiter} \quad (9.55, \text{S.297}) \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{für ruhende Leiter} \quad (9.56, \text{S.297})$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad (8.31, \text{S.259}) \qquad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \quad (9.24b, \text{S.285})$$

Hier gehen immer die Gesamtfelder, die in dem Stoff und Punkt wirken ein, nicht nur evt. Ursachen.

# 10. Elektromagnetische Energiebilanz

**(zugeführte räumliche) Leistungsdichte**  $p = \frac{dP}{dV}$  (S.288)

$p > 0$  Energie fließt zu

$p < 0$  Energie fließt ab

Joulsche Leistungsdichte  $p = \frac{\vec{J}^2}{\kappa} \geq 0$  (5.14, S.161)

**Elektrische Leistungsdichte** ganz allgemein:  $p_e = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (10.6, S.300)

$p_e = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial(\vec{E}^2)}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  (10.7, S.300)

$p_e = \dot{w}_e + \vec{E} \cdot \vec{J}_{pol}$  (10.8, S.300)

Mit der einem Volumenelement im Dielektrikum zugeführten Leistung wird dort der Energieinhalt des E-Feldes geändert und Polarisationsarbeit geleistet. Alle 3 Gleichungen sind gleichwertig und völlig allgemein.

## Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika

**Kreisprozeß**  $\Delta A_e = 0$  Energie im Dielektrikum gespeichert, keine Verluste,

$\Delta A_e > 0$  Energie teilweise in Wärme umgewandelt (irreversibel)  
(Ferroelektrika analog zur magnetischen Hysterese)

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  lineare Dielektrika haben keine Verluste ! (10.13, S.301)

$W_e = \iiint_G \left( \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \right) dV$  (10.14, S. 302) , falls  $E(t=0)=0$  und  $W_e(t=0)=0$  gesetzt wurde.

$w_e = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2$  (10.15, S.302) oder äquivalent in linearen Dielektrika gilt auch

$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$  (10.16, S.302) oder  $w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$  (10.17, S.302)

Die Polarisationsenergie muß zum Energieinhalt des E-Feldes addiert werden, um die gesamte im Dielektrikum gespeicherte Energie zu erhalten.

Beim Kondensator  $W_e = \frac{1}{2} Q_f U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C}$  (10.18, S.303)

**Energiebilanz:**  $dW_{m/e} = dA_{Quelle} + dA_{mech}$

## Energie/Leistung bei Medien in Feldern:

$\frac{d}{dt}(W_{m/e}) = U I + F_a u$   $F_i = -F_a$

UI ist dabei die von außen zugeführte elektrische,  $F_a u$  die von außen zugeführte mechanische Arbeit.

<b>Magnetische Leistungsdichte</b>	ganz allgemein:	$p_m = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(10.25, S.304)
		$p_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial(\vec{B}^2)}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{w}_B + \vec{M} \operatorname{rot} \vec{E} = \dot{w}_B + \vec{E} \cdot \vec{J}_{mag} + \underbrace{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{M})}_{=0}$	(10.26, S.304)
Mit der einem magnetisierbaren Körper insgesamt zugeführten Leistung wird der Energieinhalt des B-Feldes geändert und Magnetisierungsarbeit geleistet. Die 3 Gleichungen sind völlig gleichwertig und gelten ganz allgemein.			

**Gespeicherte magnetische Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe = linearer Magnetika**

**Kreisprozeß**  $\Delta A_m = 0$  Energie im Kern gespeichert  
 $\Delta A_m > 0$  Energie teilweise in Wärme umgewandelt (irreversibel, Hystereseschleife)  
 Hystereseverlust proportional zum Flächeninhalt der Hystereseschleife

$\vec{B} = \mu \vec{H}$  gilt bei linearen Magnetika (10.36, S.307)

$w_m = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$  (10.37, S.307)  $W_m = \frac{1}{2} i_f \Phi = \frac{1}{2} L i_f^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$  (10.38, S.308)

Diese Beziehungen gelten natürlich auch in para- und diamagnetischen Substanzen.

**Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor)**

$$p_{ges} = \vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$
 (10.39, S.310)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$
 (10.45, S.310)

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\left( \vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -p_{ges}$$
 (10.46, S.311)

**Elektromagnetische Energiebilanzen = Kontinuitätsgleichung für die gespeicherte el. u. magn. Energie**

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 \right)$$
 (10.47, S.311)

für lineare und isotrope Medien gilt vereinfacht:

$$\operatorname{div} \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{E} \cdot (\vec{J}_f + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right)$$
 (10.48, S.311)

An Grenzflächen  $\underline{\operatorname{Div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{K}}$

**Vorsicht:** Für die elektrische und magnetische Feldenergie gilt nicht das Superpositionsprinzip !

- Anmerkungen:**
- Elektromagnetisches Feld als Impulsträger
  - Berücksichtigung thermischer Verluste, isotherme Kreisprozesse



# 11. Retardierte Lösungen der Maxwell-Gleichungen

Wellengleichung 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11.2, S.319)$$

Lösung der Wellengleichung 
$$w(z,t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad (11.1, S.319)$$

Daraus können die verschiedensten Wellenformen, z.B. Stehende Wellen, erzeugt werden.

Inhomogene Wellengleichung für **E** und **B**, hergeleitet aus den Maxwellgleichungen

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \rho + \mu_0 \dot{\vec{J}} \quad (11.10, S.320) \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{B}} = -\mu_0 \text{rot } \vec{J} \quad (11.11, S.320)$$

Die Kontinuitätsgleichung 
$$\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \quad (11.12, S.320)$$

Die Felder sind über den Sender her miteinander verknüpft.

Nicht 6 sondern 4 skalare Funktionen → Übergang zu **dynamischen Potentialen**

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.13, S.321) \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi - \dot{\vec{A}} \quad (11.14, S.321)$$

**Inhomogene Wellengleichung** für dynamische Potentiale

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{A}} = \text{grad} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \right) - \mu_0 \vec{J} \quad (11.15, S.321)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.16, S.321)$$

mit der **Lorentz-Bedingung** 
$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \quad (11.17, S.321)$$

folgen:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{A}} = -\mu_0 \vec{J} \quad (11.18, S.321) \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.19, S.322)$$

**B**-Felder werden ausschließlich von Strömen erzeugt, während **E**-Felder sowohl von Ladungen als auch von zeitveränderlichen Stromverteilungen ausgehen.

**E**- und **B**-Felder bedingen sich nicht gegenseitig, sondern werden nur durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft

Retardierte Zeit 
$$t^* = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c_0} \quad (11.20, S.323)$$

Retardierte Potentiale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t^*)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (11.21, S.323) \quad \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t^*)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (11.22, S.323)$$

Vorsicht. Die retardierte Zeit muß bei der Integration mitberücksichtigt werden.

Rechenregeln bezüglich grad, div und rot siehe S.325, 11.30, 11.31, S.325, 11.35, 11.36 und S.326, 11.38, 11.39

Die unendlichen Intervallgrenzen sind häufig durch  $c_0 t$  zu ersetzen.

## Retardierte Lösungen der Maxwell-Gleichungen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{[\rho]^*}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\dot{\vec{J}}]^*}{R} dV' \quad (11.49a, S.329)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{[\vec{J}]^*}{R} dV' \quad (11.49b, S.329)$$

oder äquivalent

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[ \rho + \frac{R}{c_0} \dot{\rho} \right]^* \frac{\vec{R}}{R^3} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\dot{\vec{J}}]^* \frac{1}{R} dV' \quad (11.50a, S.330)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[ \vec{J} + \frac{R}{c_0} \dot{\vec{J}} \right]^* \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' \quad (11.50b, S.330)$$

### Dynamische Verallgemeinerung der Formel von Biot-Savart

Auch die statischen Felder werden retardiert erzeugt.

Statische Verhältnisse gelten, wenn  $\vec{J}$  und  $\rho$  hinreichend lange konstant sind.

B- und E-Feld eines Flächenstromes  $K_y[z, t]$  in der xy-Ebene liegend

$$B_x[z, t] = \frac{\mu_0}{2} K_y \left[ t - \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z > 0 \quad (11.56a, S.336) \quad B_x[z, t] = -\frac{\mu_0}{2} K_y \left[ t + \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z < 0 \quad (11.56b, S.336)$$

$$E_y[z, t] = -\frac{\mu_0 c_0}{2} K_y \left[ t - \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z \geq 0 \quad (11.56c, S.336) \quad E_y[z, t] = -\frac{\mu_0 c_0}{2} K_y \left[ t + \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z \leq 0 \quad (11.56d, S.336)$$

E- und B-Feld hängen über  $\pm c_0$  (Lichtgeschwindigkeit) zusammen

B- und E-Feld eines unendlichen Linienstromes,

kann jeweils hergeleitet werden über die Berechnung des Potentials A, geometrische Überlegungen usw.

### Anmerkungen:

Die Avancierte (vordatierte Zeit) (S.332)

$$\hat{t} := t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c_0} \quad (\text{mathematisch völlig gleichberechtigt}) \text{ entfällt wegen Kausalität}$$

Das elektromagnetische Feld ist eichinvariant (S.333)

- Lorentz-Eichung („natürliche“ Eichung, Lorentz-Bedingung)
- Coulomb-Eichung

Beispiele: S. 333

- Unendlich ausgedehnter, ebener Flächenströme unrealistisch, jedoch oft brauchbare Idealisierung
- Die physikalischen Ursachen von E und B sind nicht die momentanen Verteilungen von

$$\vec{K}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sondern die retardierte Stromverteilung und ihre Änderung.}$$

Auf der Kugelfläche mit  $r = c_0 t$  ist die Anwendung der Grenzbedingungen für E/B-Felder nicht möglich !!

## Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen

Die neue Gleichungen siehe B.S. 357.

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (11.100, S. 357) \quad \text{kleiner als im Vakuum:} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Ansatz für reines Dielektrikum  $\rho_f = 0 \quad \vec{J}_f = 0 \quad \mu_r = 1$

Brechungsindex des Dielektrikums aus der Maxwell'sche Relaxation  $n = \frac{c}{c_0} = \sqrt{\epsilon_r}$

**Vorsicht** vor bedenkenloser Anwendung der statischen Materialgleichungen !

ETG-Kurzschluß: TEDY Formelsammlung, © 1997 Dieter Braisch & Wilko Kraß. Keine Gewähr für den Inhalt und evtl. Fehler.

Zeitveränd. elektrischer (Hertzscher) Dipol	Zeitveränd. magnetischer (Fitzgeraldscher) Dipol
<p> <math>p_z(t) = q(t)l</math> (11.64a, S.341)      <math>t_0^* = t - \frac{r}{c_0}</math> (11.67, S.342) </p> <p> <math display="block">\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\dot{p}_z}{r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha</math> (11.70, S.343) </p> <p> <b>B</b>-Linien sind Kreise um die Dipolachse </p> <p> aus <math>\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \vec{B}</math> folgen dann nach einmaliger Integration nach der Zeit </p> <p> die Gln. (11.71a-c, S.344): </p> <p> <math display="block">E_r(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta</math> </p> <p> <math display="block">E_\alpha(P, t) = 0</math> </p> <p> <math display="block">E_\vartheta(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta</math> </p> <p> El. und magn. Feld sind hier also immer und überall senkrecht zueinander. </p>	<p> <math>\vec{m}_z(t) = i(t) a \vec{n}</math>      <math>t_0^* = t - \frac{r}{c_0}</math> </p> <p> <math display="block">\vec{E}(P, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{\dot{m}_z}{r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha</math> (11.88, S.353) </p> <p> <b>E</b>-Linien sind Kreise um die Dipolachse </p> <p> <math display="block">B_r(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta</math> (11.89a, S.353) </p> <p> <math display="block">B_\vartheta(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta</math> (11.89b, S.353) </p> <p> <math display="block">B_\alpha(P, t) = 0</math> (11.89c, S.353) </p> <p> El. und magn. Feld sind hier also immer und überall senkrecht zueinander. </p>
<p> <b>Retardierte Potentiale</b> </p> <p> <math display="block">\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p_z}{r^2} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \cos \vartheta</math> (11.85, S.350) </p> <p> <math display="block">\vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}_z(t_0^*)}{r} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}_z(t_0^*)}{r} (\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)</math> (11.68, S.342) </p>	<p> <b>Retardiertes Potential</b> </p> <p> <math display="block">\vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{m_z}{r^2} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha</math> (11.87, S.352) </p> <p> <math>\varphi(P, t) = 0</math>, da keine umkompensierten Ladungen vorhanden sind. </p>

<p style="text-align: center;"><b>Zeitharmonisches Dipolmoment</b></p> $p_z(t) = \hat{p}_z \sin \omega t \quad \text{für } t > 0 \quad (11.74, \text{ S.347})$ $p_z(t_0^*) = \hat{p}_z \sin(\omega t - kr) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0} \quad (11.75, \text{ S.347})$ <p style="text-align: center;">allgemeine Lsg. siehe S.347, 11.77a-c</p>	<p style="text-align: center;"><b>Zeitharmonisches Dipolmoment</b></p> $m_z(t) = \hat{m}_z \sin \omega t \quad t > 0$ $m_z(t_0^*) = \hat{m}_z \sin(\omega t - kr) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0} \quad c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ <p style="text-align: center;">allgemeine Lsg. siehe S.347, 11.91a-c</p>
<p><b>Nahzone (Näherung!) <math>kr \ll 1</math> <math>2\pi r \ll \lambda</math></b></p> $\vec{E}(P, t) = \frac{\hat{p}_z \sin \omega t}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad (11.78a, \text{ S.348})$ $\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \omega \hat{p}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad (11.78b, \text{ S.348})$ $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 i(t) l \vec{e}_z \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (11.79, \text{ S.349})$ <p>Der magnetische Anteil ist gegen den elektrischen um <math>\pi/2</math> phasenverschoben.</p>	<p><b>Nahzone (Näherung!) <math>kr \ll 1</math> <math>2\pi r \ll \lambda</math></b></p> $\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \hat{m}_z \sin \omega t}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad \text{folgt aus} \quad (11.91, \text{ S.355})$ $\vec{E}(P, t) = -\frac{\mu_0 \omega \hat{m}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad \text{folgt aus} \quad (11.91c, \text{ S.356})$ <p>Der magnetische Anteil ist gegen den elektrischen um <math>\pi/2</math> phasenverschoben.</p>
<p><b>Fernzone (Wellenzone) (Näherung) <math>kr \gg 1</math> <math>2\pi r \gg \lambda</math></b></p> $\vec{E} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi \epsilon_0 c_0^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\vartheta \quad (11.80a, \text{ S.349})$ $\vec{B} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi \epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\alpha \quad (11.80b, \text{ S.349})$ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\omega^4 \hat{p}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*)}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \vec{e}_r \quad (11.81, \text{ S.349})$ <p>Energie wird mit einer zu <math>\omega^4</math> proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene <math>\vartheta = \pi/2</math>. <b>E</b> und <b>B</b> in der Wellenzone gleichphasig.</p>	<p><b>Fernzone (Wellenzone) (Näherung) <math>kr \gg 1</math> <math>2\pi r \gg \lambda</math></b></p> $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\vartheta \quad (11.92a, \text{ S.356})$ $\vec{E} = \frac{c_0 \mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\alpha \quad (11.92b, \text{ S.356})$ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 \hat{m}_z^2 \omega^4 \sin^2(\omega t_0^*)}{(4\pi)^2 c_0^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \vec{e}_r \quad (11.93, \text{ S.356})$ <p>Energie wird mit einer zu <math>\omega^4</math> proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene <math>\vartheta = \pi/2</math>. <b>E</b> und <b>B</b> sind in der Wellenzone gleichphasig</p>

# A. Übungen & Beispiele

	Übungen		Beispiele Buch
<b>Kap 1</b> 1=1.1 2	Vektoranalytische Hilfsmittel Feldlinien Vektorfeld $\psi$ durch Kreisscheibe		
<b>Kap 2</b> 3 4 C ZA8 C 5=2.1 6=2.2 7 C ZA4 8 C ZA5 C 9 ZA6 10=2.3 11	Ladung, Strom und EM-Feld q - gleichschenkliges Dreieck $\tau$ - Kreisring, E-Feld in der z-Achse Zylinder mit Flächenladung $\sigma$ Ladungstransport im Cu- Draht / J, u F - zwischen parallelen Ströme Drehende, geladene Scheibe / I durch Ebene Drehende, geladene Kugel Flächenstromdichte in kreisförmigen Elektroden Flächenstromdichte in idealem Kondensator Bewegte q bewegter Linienstrom (B und Ableitung) F zwischen parallel zueinander bewegten q's F zwischen senkrecht zueinander bewegten q's	2.1.3 2.2.2  2.3.1a 2.3.1b 2.5.2	F von $\tau$ in z-Achse auf q in xy-Ebene K auf Torus-Luftspule, Strom-Verschmierung  q(t), i(t) auf Dipolantenne Knotenregel Kirchhoff F parallel bewegter q
<b>Kap 3</b> 12=3.1 13=3.2 C2 14=3.3 15 ZA9 16, ZA11 17 ZA12 18=3.4 19=3.5 20 21 22 C ZA14 C 23 24 ZA15 ZA16 25 26 27 C	Maxwell's Equotations Coulombfeld / verschiedene Hüllen i-Kreis; Zylinderspule mit Flächenstrom F zwischen parallelen i-Leiter i - Rechteck - F auf eine Seite (Biot-Savart) i-Knick, F auf abgelenktes Leiterstück Knotenregel / Hülle, einseitig unendliche i's i fließt in ein q, B-Feld, Durchflutungsgesetz i fließt in Punkt, J heraus: B-Feld, Maxwell gültig Bewegte $\eta$ -erfüllte Kugel Kugel-C mit Verluststrom innen Linien - i $\rightarrow \phi$ durch bewegtes Rechteck Vektorfeld - Feldlinien - div und rot B eines Rohres mit J, K in z-Richtung B eines Rohres mit J in $\alpha$ Richtung Bewegte q - Näherung E, B, (erfüllt Maxw. nicht) F zweier i - Schleifen aufeinander entgeg. gleich Halleffekt in i-durchfl. Draht, i- Verdrängung ! Kugelkondensator mit konst. E-Feld, ges. $\rho(r)$ Verschiedene Vektorfelder: Feldlinien bestimmen wie A 22, nur mit Maxwell differentiell gerechnet B-Feld zu A8, Grenzbed. von Elektroden	3.2.2 C 3.4.2a,b 3.6.1a 3.6.1b  3.6.1c C 3.7.4a  3.7.4b 3.7.4c	Endlicher Linien - i B-Feld mit Biot-Savart $\Phi$ durch bewegtes Rechteck E von $\eta$ - erfüllter, $\sigma$ -belegter Kugel B von zyl. Rohr in z-Richtung mit J, K in $\alpha$ -Richtungn wie A22 ! B von unendlichem Flächenstrom K E von unendl. $\sigma$  B von Rohr mit diff. Maxwell $\rightarrow$ A22 B von Rohr mit diff. Maxwell, Grenzbed.; $\rightarrow$ A22
<b>Kap 4</b> 28=4.1 ZA20 29 C ZA23 ZA28 C 30=4.2  31=4.3 C 32=4.4 33 C ZA21 ZA22 C 34 35	Elektrostatik Apollonius -Kreise - q's Potentialflächen Influenz: p auf Metallkugel, Ersatzdipol, Kräfte $\sigma$ - Kreisscheibe, ges. E(0,0,z), $\phi(0,0,z)$ E von 2 parallelen $\sigma$ -Kreisscheiben, $\phi$ , Q, C von Kreisscheibe mit inhomog. $\sigma$ -Dichte Äquipot.linien von Liniendipol $\tau$ , Apolloniuskreise E-Feld von $\sigma$ - Langer Streifen F auf p, unter verschied. Beding. (siehe Kap. 4lu) $\phi$ von $\eta$ - geladener Kugel mit Poisson E-Feld einer $\sigma$ geladenen Hohl-Kugel, dE Ansatz E und $\phi$ von unendl. langem, hom. gelad. Zylind. E bzw B von $\sigma$ bzw K belegten unendl. Flächen Wpot von p in E Feld, F auf p - inhomogenes Feld	4.1.1a C  4.1.1b C  4.2.2  4.4.1 4.4.2 4.4.4  4.6.2	$\phi$ von q Punktladung $\phi$ von $\tau$ Linienladung  F auf p (quer zu E), siehe Kap. 4lu)  $\phi$ von homog. gel. Kugel E-Feld von Liniendipol $\phi = \text{const.}$ im Faraday-Käfig  W von homog. gel. Kugel

<b>Kap 5</b>	Metallische Leiter		
36 C	Ladungsdiffusion (nette Aufgabe)	5.4.4a C	„verlustbehaft. Kondensator“, $J$ , $\varphi$ , $R$
37	Corbino-Scheibe / Halleffekt	5.4.4b	Gebogener Körper, $R$
ZA24 C	Halleffekt, Hallwiderstand bei n- und p- Leitung	5.5.2a	Spiegel - $q$ an Metallwand (s.a, A43)
38	Ladung / Dipol - Perpetum mobile ??	5.5.2b C	influ. Metallkugel in hom. $E$ , $\varphi$ mit Poisson
39	Platten C - Energie für Plattenbewegung	5.6.3	Theorie des Erdens (s.a. A47)
40=ZA25	Bewegte $\tau$	5.6.7a	Platten-C
41 C	$\varphi$ - von „verlustbehaftetem Kondensator“, $R$	5.6.7b	Kugel-C
42 C	$R$ von Corbino-Scheibe für Sonderfall		
43=5.2	$F$ auf $q$ von influ. Metallwand, gesa. influ. Ladung		
44=5.3	Metallkugel influenziert /geerdet		
45	Metallkugel mit Hohlraum, $E$ und $\varphi$		
ZA29	-“- und $q$ im Hohlraum, $\varphi$ und $E$		
46 C4	Influenzierte Metallkugel $\rightarrow$ p-Ersatzdipol nichtleitföh. Kugel in leitf. Medium, p-Ersatz		
ZA26	$p$ im Hohlraum eines Metalles: Kraft; s.a. ZA20		
47	Kugel und $q$ , $\varphi$ - koeffizienten, Theorie des Erdens		
48	Platten-C / $\sigma$ , E- Feldüberlagerung		
49=5.4	Metallkugeln / $\varphi$ - koef. allgemein, Spitzenwirk.		
50 C	Metallkugel, Ersatz $p$ , E-Feld-RB $\rightarrow$ Lsg. f. $p$		
51	Geladene Metallkörper / $\varphi$ - Koeff. allgemein		
52	Zusatz - Bildchen		
	Mettalische Kreiszyylinder, Apollonius mit $\tau$ , $C$		
<b>Kap 6</b>	Magnetostatik		
53=6.1	i-Schleife: $F_{\text{mag}} = 0$ , $T_{\text{mag}} = m \times B$	6.1.1 C	A von Linien-i
54=6.2 C	Koaxialkabel, 2 koax, stromtrag. Zylinder	6.4.2 C	$L$ , $B$ , $\varphi$ , A von Torus-Spule
55=6.3	Rechteckige Ringspulen ineinander, $M$ 's, $L$ 's	6.4.4 a	$M$ bei Torus-Sp. und i-Schleife
56=6.4	$\varphi$ durch Kreisscheibe mit $B$ von magn.	6.4.4 b	$M$ bei 3 i-Schleifen
ZA31	Punktdipol		
ZA32	$\varphi$ durch Kreissegment mit $B$ von i-Schleife		
	$\varphi$ durch Kreisscheibe mit $B$ von i- Schleife		
57=6.5	Grenzbed. der Luftspule aus Bsp.2.2.2 überprüfen	6.4.4 c	$M$ , $\varphi$ bei verschiedenen i-Richtungen von Spulen
58=6.6	B-Feld von 2 Linien - i, Apolloniuskreise		
59=6.7	Rechteck - i / $L \rightarrow 2L$		
<b>Kap 7</b>	Induzierte quasistationäre Ströme		
60=7.1	A von Kreis - i	7.3.4 C	$B$ , $L$ , $W$ von Koaxialleitung
61=7.2	Kreis - i $\rightarrow$ E - ind zu A60	7.5.1 a	Bewegter Metallstab in B Feld $\rightarrow$ E-Feld
62=7.3 C	Zylinderspule, $B$ und $E_{\text{ind}}$ , quasistationär	7.5.1 b	Bewegte Metallstäbe auf Schienen in B
63=7.4	Stromverdrängung	7.5.3 a	-“- mit Farradayscher Flußregel
64=7.5	Wirbelströme, harm. B-Feld zw. 2 Elektroden	7.5.3 b	Asynchron-Motor, „mathematisch“
65	Bewegte Leiterstäbe im B-Feld, s.a.Bsp. 7.5.1b		
66=7.6	Generator		
67=7.7	Luftspule und Stromschleife: $M$		

<b>Kap 8</b> 68=8.1 69=8.2 ZA38 70 71 C 72=8.3 73	Elektrisch polarisierbare Stoffe Platten - C mit P-Bereich Zylinder -C, E radial, mit verschiedenem $\epsilon$ $\epsilon(\rho)$ , so daß E- konst. ist (über D-Feld) Platten - C, zylindrischer $\epsilon$ Bereich, s.a.Bsp8.5.2b Kugel, p Ersatz, polarisiert in hom. E-Feld Kügelchen polarisiert - F F zwischen 2 i - Schleifen	8.2.1a 8.2.1b  8.4.1 8.5.2 a 8.5.2 b 8.5.2 c	Pol. Kugel mit P im Vakuum $\rightarrow$ E-Feld Pol. Stab  Pol. Kugel im Vakuum $\rightarrow$ D Platten-C mit $\epsilon$ quer Platten-C mit $\epsilon$ längs Pol. Kugel durch $E_0$ im Vakuum $\rightarrow$ P, E-ges
<b>Kap 9</b> 74 9.1 75 76 77=9.2 C ZA43 C 78=10.1 79=9.3 C ZA39 80=9.4 81	Magnetisch polarisierbare Stoffe Permanentmagnet mit M; B, H mit $K_{\text{mag}}$ Luftspule und Permanent -M, Vergleich über K 2 Spulen verbinden, Flüsse, Gesamt L Zylinderspulen ineinander, mit $\mu$ , $K_{\text{mag}}$ Draht mit $\mu$ Dickwandiges Rohr mit hom. J und $\mu$ : B, H, $K_{\text{mag}}$ Koax - Energie Ringkern mit Luftspalt Ringkern mit Luftspalt und Magnetisierung Hysteres-Kurve $\infty$ Scheibe mit $B_{\text{außen}}$ , M, $\mu$ , $K_{\text{mag}}$	9.3.1 a 9.3.1 b ZA 40 ZA 41 C 9.4.1 a  9.4.1 b 9.6.3	Permanentmagnet mit M homogen magnetisierte Kugel mit M von Außenfeld magn. Kugel, B-Feld bestimmen permeables Kügelchen, M, m, F Torus-Spule $\rightarrow$ M, H  Permanent-Magnet, Div H Torus-Spule mit $\mu \rightarrow$ H, $\phi$ , B
<b>Kap 10</b> 78=10.1 82=10.2 83 84 85	Elektromagnetische Leistungsbilanz Koax - Energie S von Stromschleifen J - Verdrängung durch Wirbelströme - Rohr Generator - Drehmoment Doppelleitung	10.2.3 10.3.1 a 10.3.1 b 10.3.1 c 10.3.1 d	$\mu$ teilw. in Zylinderspule, F zieht $\mu$ -Teil hinein S von Draht mit $\kappa$ , zyl. Leiter, E-Feld, S S von bew. q S von 2 zusammengebr. q S von Platten-C (ganz nett)
<b>Kap 11</b> 86 87=11.1 88=11.3 11.2 89 90 91=11.4 92 93 94 95 96 97	Retardierte Lösungen der Maxwell Gleichungen K harmon. Flächenstrom: E und B Wellen K sprungartig, E- und B Wellen $\psi_E$ eines Stromes innerhalb von $c_0 t$ Linien - i , Rampe $i = kt$ Bewegte Platte F auf Dielektrikum, Platten C mit teilweise $\epsilon$ m <u>und</u> p Wellen = Hertz & Fitzgerald Dipol Drahtschleifen Induktion, U - Messung Zyl.spulen drehbar, Induktion, i- Permanent-M p, S - Mittelwert Faraday-Scheibe Gegeninduktion im Einzelnen - Diagramm Bewegte Leiterschleife ins B-Feld, $F_a$ , i	11.4.6 a,b 11.4.6 c 11.5.1 11.6.1	Linear pol. ebene Welle, Wellen von K, S.334ff Wellen von i, siehe auch S.338 Hertz - p mit $p_z = kt^2$ Fitzg - m mit $m_z = kt$

## B. E - und B - Feld

E-Feld		B-Feld	
Kräfte	$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{21} = -\vec{F}_2$	Kräfte	$\frac{\Delta \vec{F}_1}{\Delta s} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r_{12}} \vec{e}_{21} = -\frac{\Delta \vec{F}_2}{\Delta s}$
Ursachen	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$	Ursachen	$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}})$ $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0$
Potential + Eigenschaften	$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$ $\varphi(P) = -\int_{r_0}^P \vec{E} d\vec{r}$	Potential + Eigenschaften	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$ $\Phi = \oint_K \vec{A} d\vec{r}$
DGL	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	DGL	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
Punktladung	$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ $r_0 \rightarrow \infty$	Biot-Savart	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV$ $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dV$
Linienladung	$\varphi(\rho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$ $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$	Linien-strom	$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha$
Dipol	$l \rightarrow 0 \quad \vec{p} = \operatorname{const}$ $\varphi(P) = \frac{\vec{p} \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\vec{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$	Dipol	$a \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \vec{m} = ia\vec{n} = \operatorname{const}$ $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\alpha$ $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$
Polarisation	$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ $\vec{P} = \rho_0 \vec{l}$	Magnetisierung	$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$ $\vec{m} = i\vec{a}$
Kräfte, Drehmoment	$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times \vec{E}$	Kräfte, Drehmoment	$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$ $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \vec{B}$
Polarisationsladungen	$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{pol}$ $\sigma_{pol} = \frac{dQ_{versch}}{da} = \vec{P} \cdot \vec{n}$	Magnetisierungsströme	$\vec{J}_{mag} = \operatorname{rot} \vec{M}$ $\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{n}$
	$\operatorname{Div} \vec{P} = \vec{n} \cdot (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) = -\sigma_{pol}$		$\operatorname{Rot} \vec{M} = \vec{n} \times (\vec{M}^+ - \vec{M}^-) = \vec{K}_{mag}$
Polarisationsstrom	$\operatorname{div} \vec{J}_{pol} + \dot{\rho}_{pol} = 0$ $J_{pol} = \rho_0 \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{P}}$		$\operatorname{div} \vec{J}_{mag} = 0$ $\oint_K \vec{M} \cdot d\vec{r} = I_{mag}$
Materialgrößen, Hilfsfeld	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$	Materialgrößen, Hilfsfeld	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$ $\chi_m > 0 \quad \text{paramagnetisch}$ $\chi_m < 0 \quad \text{diamagnetisch}$



Freie Ladungen und Verschiebungsdichte	$\rho = \rho_{pol} + \rho_f \quad \vec{J} = \vec{J} + \vec{J}_{pol}$ $div \vec{D} = \rho_f \quad \frac{1}{\mu_0} rot \vec{B} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$	Freie Ströme und magnet. Feldstärke	$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$ $rot \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}}$
	$\sigma = \sigma_{pol} + \sigma_f$ $Div \vec{D} = \sigma_f \quad Rot \vec{D} = Rot \vec{P}$		$\vec{K} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$ $Rot \vec{H} = \vec{K}_f \quad Div \vec{H} = -Div \vec{M}$ $\frac{1}{\mu_0} Rot \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$
Grenz-flächen zw. versch. Dielektrika	$Div \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{pol} \quad \text{für } \sigma_f = 0$ $Rot \vec{E} = \vec{0}$ $Div \vec{D} = 0 \quad \text{für } \sigma_f = 0$ $Rot \vec{D} = Rot \vec{P}$	Grenz-flächen zw. versch. permeab. Bereichen	$Rot \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{mag} \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0}$ $Div \vec{B} = 0$ $Rot \vec{H} = 0 \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0}$ $Div \vec{H} = -Div \vec{M}$

## Einheiten

E-Feld			B-Feld		
Größe	Gleichung	Einheit	Größe	Gleichung	Einheit
Stromstärke	$I = \frac{dQ}{dt}$	A	induzierte Spannung	$U = -N \frac{d\Phi}{dt}$	V
Ladung	$Q = It$	C=As	magnetischer Fluß	$\Phi = BA$	Wb=Vs
Spannung	$U = Es$	V	Spannung	$V = Hl$	A
Verschiebungsdichte	$D = \frac{Q}{A}$ $D = \epsilon E$	As/m <sup>2</sup>	Induktion, Flußdichte	$B = \frac{\Phi}{A}$ $B = \mu H$	T=Vs/m <sup>2</sup>
Feldkonstante	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$	F/m=As/(Vm)	Feldkonstante	$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c_0^2}$	H/m=Vs/(Am)
Permittivität	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$	F/m=As/(Vm)	Permeabilität	$\mu = \mu_0 \mu_r$	H/m=Vs/(Am)
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	F=As/V	Induktivität	$L = \frac{\Phi N}{I}$	H=Vs/A
Plattenkondensator	$C = \frac{\epsilon A}{s}$	F	Zylinderspule	$L = \frac{\mu AN^2}{l}$	H
Feldenergie	$W_F = \frac{CU^2}{2}$	J	Feldenergie	$W_F = \frac{LI^2}{2}$	J
Plattenkondensator	$W_F = \frac{\epsilon E^2 V}{2}$	J	Ringspule	$W_F = \frac{\mu H^2 V}{2}$	J
Energiedichte	$w = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2}$	J/m <sup>2</sup>	Energiedichte	$w = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$	J/m <sup>2</sup>

## C. Besondere Anordnungen

### Punktförmiges

Punktladung (ruhend) im Ursprung des Koordinatensystems

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{bez. Fernkugel}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Grundlage für die Berechnung vieler anderer Formen mit dem dq Ansatz.

- Berechnung über integrales Maxwellgesetz (3.41, S.105)

(Bsp.4.1.1a)

bewegte Punktladung, genähert durch 2.28, S.73

Maxwellgleichung 3.2, S.82 wird nicht erfüllt; Formel ist wirklich nur eine Näherung

- Berechnung der Rotation und der Divergenz im Kugelkoordinatensystem

(A23)

Punktdipol (ruhend) in z-Richtung ausgerichtet und im Ursprung des Koordinatensystems liegend

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad \text{wenn } l \rightarrow 0 \quad \text{und } \vec{p} = \text{const}$$

(4.14, S.130)

$$\varphi(P) = \left\langle \frac{ql \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right\rangle_z = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(4.13, S.129)

$$\vec{E} = \frac{P_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta)$$

(4.15, S.130)

### Linienhaftes

„endliche Linienladung  $\tau$ “, die von -l bis +l auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt

$$\varphi(\rho, \alpha, 0) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\rho_0 \cdot (l + \sqrt{\rho^2 + l^2})}{\rho \cdot (l + \sqrt{\rho_0^2 + l^2})} \right]$$

Potential in der xy-Ebene bez. der Abstandes  $\rho_0$

$$\vec{E}(\rho, \alpha, 0) = \vec{e}_\rho \cdot \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{\rho \cdot \sqrt{\rho^2 + l^2}}$$

E-Feld in der symmetrisch liegenden xy-Ebene

- Berechnung durch Superposition von dq Elementen  
126)

(Bsp. 4.1.1.b, S.

„unendliche Linienladung  $\tau$ “, die von  $-\infty$  bis  $+\infty$  auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

(4.8)

bez auf den Abstand  $\rho_0$  des Bezugspotentials

$$\vec{E}(\rho, \alpha, z) = \vec{e}_\rho \cdot \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho}$$

(4.9)

- Berechnung durch Grenzwertübergang aus endlicher Linienladung

(Bsp. 4.1.1.b, S.127)

„unendliche, bewegte Linienladung  $\tau$ “, die von  $-\infty$  bis  $+\infty$  auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt und sich mit  $u_x$  in x-Richtung bewegt

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\tau u_x}{2\pi\epsilon_0 \rho^2} (\sin\alpha \cdot \vec{e}_\alpha + \cos\alpha \cdot \vec{e}_\rho)$$

aus 3.4 S.82 und Vorgaben

$$\vec{B} = B(\rho, \alpha) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \tau u_x \sin\alpha}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_z$$

- Ansatz aus unendlicher Linienladung, mit veränderlichen Koordinaten

- Berechnung des B-Feldes über Maxwell und die zeitliche Ableitung des „statisch gerechneten“ E-Feldes

(A40)

Liniendipol mit Belag  $\pm\tau$ , in z-Richtung zeigend; Pole liegen im Abstand l voneinander in der xz-Ebene;  $\tau$  gehört zu  $\rho_1$

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\rho_1} \vec{e}_{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \vec{e}_{\rho_2} \right]$$

mit den jeweiligen Einzelabständen und den Richtungsvektoren (4.19, S.134)

$$\varphi(P) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Bezugspotential liegt genau in der Mitte zwischen den Leitern

- Potentiallinien sind Apolloniuskreise, Siehe dazu Lsg A4.2, E-Feldlinien siehe S.134

- Berechnung durch Superposition zweier unendlicher Linienladungen

(Bsp. 4.2.3, S.134; A4.2)

gerader Teil eines Linienstromes, in der z-Achse liegend, von  $z_1$  bis  $z_2$  mit dem Strom  $i$ , in z-Richtung gezählt

$$\Delta \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[ \frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \vec{e}_\alpha \quad \text{Beitrag zum B-Feld} \quad (3.11a, S.88)$$

- B.S.

Unendlicher Linienstrom, in der z-Achse, mit  $i$  in z-Richtung gezählt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha \quad (3.11b, S.88) \quad \vec{A} = \vec{e}_z \cdot \frac{-\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad \rho_0 \text{ Abstand des Bezugspunktes (Bsp 6.1.1, S.195)}$$

- Durchflutungsgesetz, differentielle Beziehungen zwischen A und B

Unendlicher Leiter mit homogener Stromdichte  $J$ , in z-Richtung zeig.,  $J$  in z-Richtung gezählt und mit Leitfähigkeit  $\kappa$

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \mu_0 \begin{cases} \frac{J}{2} \rho & 0 \leq \rho < R \\ \frac{JR^2}{2\rho} & \rho > R \end{cases}$$

$\vec{E} = \frac{J}{\kappa} \vec{e}_z$  im ganzen Raum (wegen Grenzbedingungen), wenn  $J$  nicht zeitlich veränderlich ist!, sonst anderes ohmsches Gesetz.

- ohne Gewähr, selber gerechnet.

Unendlicher Draht mit homogenem, freiem  $J$  und Permeabilität  $\mu_r$ , in z-Richtung zeigend, Radius  $R$ , Strom  $I_f$

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \frac{I_f}{2\pi R^2} \rho & 0 < \rho < R \\ \frac{I_f}{2\pi \rho} & R < \rho \end{cases} \quad \vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \mu_r \mu_0 \frac{I_f}{2\pi R^2} \rho & 0 < \rho < R \\ \mu_0 \frac{I_f}{2\pi \rho} & R < \rho \end{cases}$$

Magnetisierungsströme:

$$\vec{J}_{mag} = (\mu_r - 1) \frac{I_f}{\pi R^2} \vec{e}_z \quad \vec{K}_{mag} = (1 - \mu_r) \frac{I_f}{2\pi R} \vec{e}_z$$

- Integrales Maxell

(A77=9.2)

2 unendliche, parallele Leiter mit  $+i$  und  $-i$

- B-Feldlinien sind Apoloniuskreise

(A58=6.6)

Doppelleitung, 2 Leiter mit  $+i$  und  $-i$ , Radius  $\rho_0$  und Mittelpunktabstand  $D$

$$\frac{L}{l} = \mu_0 \frac{h}{\pi} \ln \frac{D - \rho_0}{\rho_0} \quad \text{Selbstinduktivität pro Länge}$$

- Maxwell integral und Flußberechnung

(A85)

Linienhafter, mit  $\tau$  geladener Kreisring, übt Kraft auf eine Punktladung aus, Ausrichtung in z- Achse, Radius  $R$

$$\vec{E}(0,0,z) = \vec{e}_z \cdot \frac{R \cdot \tau \cdot z}{2\epsilon_0 \cdot \sqrt{z^2 + R^2}^3}$$

- Superposition von dq Elementen

(A4)

Linienförmiger Kreisstrom  $i$ , Ausrichtung des Kreises in z-Achse, des Stromes in  $e_\alpha$ , Radius  $R$ , Mitte ist auf der z- Achse

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cdot \vec{e}_z$$

- B.S.

(A13=A3.2)

Vektorpotential auf der z- Achse:  $\vec{A}(0,0,z) = 0$ , außerhalb nur  $\alpha$  Komponente

(A60=7.1)

## Flächenförmiges

unendliche geladene Fläche mit Flächennormale in z-Richtung und homogener Flächenladung (aus A29)

$$\varphi = \infty \quad \text{bez. Fernkugel;} \quad \varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z| \quad \text{bez. der Fläche}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \cdot \vec{e}_z \quad (3.70, \text{ S.120})$$

- Berechnung durch Grenzwertübergang aus endlicher Fläche, z.B. kreisförmige Scheibe (Bsp.3.7.4a)

unendliche, flächenstrombehaftete Fläche, Flächennormale in z-Richtung, Flächenstrom  $K$  zeigt in y-Richtung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K_y}{2} \operatorname{sgn}(z) \cdot \vec{e}_x \quad (3.45, \text{ S.112}) \quad \text{Rechte Hand Regel !!!}$$

- Berechnung durch Maxwell oder über Grenzbedingungen und Symmetrieüberlegungen (Bsp. 3.6.1.c, S.111)  
 - sinusförmiger Strombelag, siehe dazu Ausbreitung in Bsp.11.4.6, S.333ff, vor allem S.336! (A86)

unendlich lange, endlich breite, geladene Fläche, in z-Richtung unendlich lang, geht von  $x=-h$  bis  $x=h$ ,  $y=0$ , mit  $\sigma$  geladen  
 $\varphi$  extrem komplexer Ausdruck, entstehend aus  $\ln(x^2+y^2)$ ..., nur mit Maple...

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(x+h)^2 + y^2}{(x-h)^2 + y^2} \right] \cdot \vec{e}_x + \left[ \arctan \frac{x+h}{y} - \arctan \frac{x-h}{y} \right] \cdot \vec{e}_y \right]$$

- Superposition unendlicher Linienladungen (A31=A4.3)

2 unendliche, dickwandige, leitende, parallele, geladene Platten, im Abstand  $l$  voneinander, mit Ladung  $Q_1$  (die linke) und  $Q_2$  (die rechte), Flächen  $A$  und Ausrichtung in z-Richtung

- ges. sind die inneren ( $\sigma_1'$ ,  $\sigma_2'$ ) und äußeren ( $\sigma_1''$ ,  $\sigma_2''$ ) Flächenladungsdichten, so daß sich das E-Feld in den Platten zu ergibt!

$$\sigma_1'' = \sigma_2'' = \frac{Q_1 + Q_2}{2A} \quad \sigma_1' = -\sigma_2' = \frac{Q_1 - Q_2}{2A}$$

- die E-Feld verteilung ist dann

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_z \cdot \begin{cases} -\frac{\sigma_2'}{\epsilon_0} = -\frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0} & z < 0 \\ \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2}{2\epsilon_0} & 0 < z < l \\ \frac{\sigma_2''}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0} & l < z \end{cases}$$

- Überlagerung unendlicher, geladener Flächen mit Zusatzbedingung fürs E-Feld (A48)

Kreisförmige, geladene Scheibe mit Radius  $R$ , Flächennormale in z-Richtung und homogener Flächenladung  $\sigma$

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right] \quad \text{bez. Fernkugel} \quad \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| - R \right] \quad \text{bez. Scheibenmittelpunkt}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{-z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \operatorname{sgn}(z) \right] \cdot \vec{e}_z \quad \text{E-Feld auf der z-Achse}$$

- Berechnung durch Superposition und Integration punktförmiger Ladungen  $dq$  ( $d\varphi$  und  $dE$ ,  $dE$  mit Symmetrieüberlegung)  
 - entartet zu unendliche Flächenladung (A29)

Kreisförmige, inhomogen geladene Scheibe mit Radius  $R$ , Flächennormale in z-Richtung

$$\sigma = \frac{k}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad \text{ist gegeben. ges. Kapazität. Bestimmung von } Q \text{ und } \varphi(0) \rightarrow C$$

$$Q = 2\pi k R \quad \varphi(x, y, z = 0,0,0) = k \frac{\pi}{4\epsilon_0} \quad C = \frac{Q}{\varphi(0)} = 8\epsilon_0 R$$

2 solche Scheiben im Kondensatorbetrieb nebeneinander:

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{2\varphi_1} = 4\epsilon_0 R$$

- Überlagerung von  $d\varphi$  Elementen von  $dq = \sigma da$  Ladungen, und Integration;  $z=0$  vorher gleich einsetzen! (ZA28)

Kreisförmige, rotierende, geladene Scheibe, Scheibe rotiert um Figurenachs z mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und konstanter Flächenladungsdichte  $\sigma$

$$\vec{K}(\rho) = \vec{e}_\alpha \cdot \omega \cdot \rho \cdot \sigma \quad \text{Flächenstromdichte}$$

(A7)

Dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenladung  $\sigma$ ,

Radius R, Ausrichtung in z-Richtung, Mitte ist z-Achse, Ausdehnung ist von  $Z_1$  bis  $Z_2$

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(z-z_2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + R^2}} \right] \cdot \vec{e}_z \quad \text{E-Feld auf der z-Achse}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = 0 \quad \text{bei unendlicher Ausdehnung !}$$

- Ansatz aus  $\tau = \sigma dz$ -Elementen von A4

(ZA8)

Dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenstrom  $K_\alpha$ , Ausrichtung in z-Achse, Länge von  $z_1$  bis  $z_2$ , Radius R

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 K_\alpha}{2} \left[ \frac{z-z_1}{\sqrt{R^2 + (z-z_1)^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{R^2 + (z-z_2)^2}} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \mu_0 K_\alpha \cdot \vec{e}_z \quad \text{bei unendlicher Länge !}$$

-B.S. oder differentielle Kreisstromelemente

(A13=3.2)

Unendlich langer, dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenstrom in  $\alpha$  Richtung

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 K_\alpha \cdot \vec{e}_z & 0 \leq \rho < R \\ 0 & R < \rho \end{cases} \quad \text{ind. E-Feld:} \quad \vec{E}_{ind}(\rho) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} [K_\alpha(t)] \cdot \vec{e}_\alpha \begin{cases} \cdot \rho & 0 \leq \rho < R \\ \frac{R^2}{\rho} & r < \rho \end{cases}$$

- Maxwell's quasistationäre Gleichungen (integral oder differentiell)

(A62=7.3)

falls  $K_\alpha$  durch N Windungen von i erzeugt wird, dann gilt:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 Ni}{l} \vec{e}_z & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

$$K_\alpha = \frac{Ni}{l}$$

- Maxwell integral trivial

(A67=7.7)

2 parallele, dünnwandige, geladene Zylinder unendlicher Länge, je mit Radius R und vorzeichenverschiedener Ladung

- Beschreibung durch 2 Linienladungen, die Apolloniuskreise für das Potential bilden, 2 der Kreise seien die realen Zylinder

- Bild dazu siehe A52

- Bestimmung der Anordnung der Kapazität

- Apollonius- Ansatz konstanten Potentials

(A52)

## Räumliches

homogen geladene Kugel mit Oberflächenladung, Mittelpunkt liegt im Ursprung, Radius R, Dichten  $\rho_0$  und  $\sigma_0$

$$Q(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 & 0 < r < R \\ \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 + \sigma_0 4\pi R^2 & R < r \end{cases} \quad \vec{E} = \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & 0 < r < R \\ \left[ \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0} \right] \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R < r \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) + \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} & 0 < r < R \\ \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & R < r \end{cases}$$

- Berechnung über Poissonsche DGL mit Grenzbedingungen

( $\rho$ : A33)

- Maxwell und Symmetrieüberlegungen

(E:Bsp 3.6.1.a, S. 107,  $\varphi$ : Bsp 4.4.1, S.137)

homogen mit  $\sigma$  oberflächlich geladene, rotierende Kugel, Kugel liegt im Ursprung, Radius R, z ist Rotationsachse

$$\vec{K} = \sigma \omega_z R \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\alpha$$

(ZA4 zu A7)

Dickwandiges stromdurchfl. Rohr unendlicher Länge mit homogener Stromdichte  $J_z$  und Oberflächenstrom (außen)  $K_z$  in Richtung z-Achse

Innenradius  $R_1$ , Außenradius  $R_2$

$$I(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho < R_1 \\ J_z \pi \cdot (\rho^2 - R_1^2) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ J_z \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) + K_z \cdot 2\pi R_2 & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} + \mu_0 K_z \frac{R_2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

- Integrale und differentielle Maxwellgleichungen

(A22, A26)

Dickwandiges, stromdurchfl. Rohr mit Permeabilität unendlicher Länge mit homogener, freier Stromdichte  $J_z$

Innenradius  $R_1$ , Außenradius  $R_2$

$$I_f(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho < R_1 \\ J_z \pi \cdot (\rho^2 - R_1^2) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ J_z \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{H} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{\mu J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{J}_{mag} = J_z \vec{e}_z \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

$$\vec{K}_{mag} = \vec{e}_z \cdot \frac{J_z}{2} \begin{cases} 0 & \rho = R_1 \\ \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} & \rho = R_2 \end{cases} \quad I_{mag} = 0 \text{ durch den Querschnitt des Drahtes}$$

- Durchflutungsgesetz, Maxwell differentiell mit Randbedingungen

(ZA43)

Dickwandiges Rohr unendlicher Länge mit homogener Stromdichte  $J_\alpha$  in  $\alpha$  Richtung ,

Mitte ist z-Achse, innen  $R_1$ , außen  $R_2$

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_z = \begin{cases} \mu_0 J_\alpha (R_2 - R_1) & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ \mu_0 J_\alpha (R_2 - \rho) & R_1 < \rho \leq R_2 \\ 0 & R_2 < \rho \end{cases}$$

- Integrale Maxwell und Symmetrieüberlegungen für Ansatz, A13 als Grenzbedingung innen, Durchflutungsgesetz (ZA14)

Koaxialleiter, innen homogene Stromdichte bis  $\rho_1$ , außen Flächenstrom bei  $\rho_2$ ,

Mitte = z-Achse, Innenstrom fließt in z-Richtung

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho < \rho_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 0 & \rho_2 < \rho \end{cases}$$

$$W = \frac{I^2}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} l \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{gespeicherte Feldenergie; } L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \cdot \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{Induktivität der Leitung}$$

- Maxwell integral, Formel für Arbeit, Definition der Induktivität

(Bsp.7.3.4, S.233)

Koaxialleiter, 2 stromtragender koax. Zylinder, Mitte ist z-Achse

Innenleiter Radius  $\rho_1$  und homogenem Gleichstrom  $I_1$ , Außenleiter zwischen  $\rho_2$  und  $\rho_3$  mit homogenem Strom  $I_2$  in z-Richt. gezählt

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{cases} I_1 \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ \frac{I_1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ \left[ I_1 + I_2 \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right] \cdot \frac{1}{\rho} & \rho_2 \leq \rho \leq \rho_3 \\ \frac{I_1 + I_2}{\rho} & \rho_3 \leq \rho \end{cases}$$

falls  $I_1 = -I_2$  „Außenleiter als Rückleiter“, gilt:

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{cases} I_1 \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ \frac{I_1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ \left[ I_1 \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right] \cdot \frac{1}{\rho} & \rho_2 \leq \rho \leq \rho_3 \\ 0 & \rho_3 \leq \rho \end{cases}$$

- Berechnung durch integrale Maxwellgesetze

(A54=6.2)

Unendlich langer Zylinder mit homogener Raumladungsdichte  $\eta$  innen, Mitte ist z-Achse, Radius R

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\eta}{4\epsilon_0} (R^2 - \rho^2) & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{\rho} & \rho > R \end{cases}$$

Potential ist bezogen auf der Zylinderoberfläche !

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \begin{cases} \frac{\eta}{2\epsilon_0} \rho & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{\rho} & \rho > R \end{cases} \quad \text{n.kraass}$$

- Poisson's DGL oder integrales Maxwell und Symmetrieüberlegungen (ZA22)

---

## Influenz von einer Punktladung q auf eine unendliche, metallische Fläche

Fläche = xy-Ebene, Punktladung liegt auf pos. z-Achse

von der Influenzierten Ladung (liegt genau spiegelbildlich zu q) erzeugte E-Felder

$$\vec{E}^\sigma = -\vec{E}^q = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{rq}}{r^2} \text{ für } z < 0, \text{ d.h. im Metall (oder im leeren Halbraum), denn } E_{\text{ges}} = 0 \text{ nach (5.37, S.171) im Metall}$$

$$\vec{E}^\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{\sigma q}}{r_{\sigma q}^2} \text{ für } z > 0, \text{ d.h. von } \sigma \text{ erz. Feld im Halbraum der Ladung q, deren E-Feld sich mit diesem überlagert!}$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_z^+ = \epsilon_0 \lim_{z \rightarrow 0} E_z^+ = \frac{-q}{2\pi} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}^3} \quad \text{influenzierte Flächenladungsdichte nach (5.41, S.175)}$$

$q_{\text{influenz}} = -q$  gesamte influenzierte Ladung

- Influenzgesetze, siehe 5.37 und 5.38 S.171

(Bsp. 5.5.2a, S.174, A43=5.2)

---

„verlustbehafteter Kondensator“ = „homogen leitfähiger, zylindrischer Körper mit idealen Elektroden“  
an den Stirnseiten, der Länge l und Radius R mit konstanter Innenstromdichte, ideal leitenden Elektroden und linienhafter Stromzuführung i; der Körper und der Linienstrom sind in z-Richtung ausgerichtet

$$\vec{K} = \vec{e}_\rho \cdot \frac{i}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \text{ Oberflächenstromdichte der scheibenförmigen Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

- Kontinuitätsgleichung

(A8)

außerhalb des „Kondensators“ ist das Magnetfeld identisch dem eines unendlichen linienförmigen Leiters (s.o, Linienhaftes);  
innerhalb des „Kondensators“ gilt:

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \mu_0 \frac{i}{\pi R^2} \frac{\rho}{2} & 0 < \rho < R \\ \mu_0 \frac{i}{2\pi\rho} & R < \rho \end{cases}$$

- differentielle Maxwellgleichungen mit Grenzbedingungen

(A27)

$$\varphi(z) = \frac{-i}{\kappa\pi R^2} z + C$$

- aus Randbedingung, Poissonsche DGL

(A41)

---

kreisförmiger Kondensator mit homogener, zeitabh. Flächenladung, und i(t) Zufluß, Ausrichtung in z-Richtung, Radius der Elektroden ist R

$$\vec{K} = \vec{e}_\rho \cdot \frac{i}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \text{ Oberflächenstromdichte der scheibenförmigen Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \text{Oberflächenladung der Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

- Kontinuitätsgleichung

(ZA5 zu A8)

---

## torusförmige Spule mit rechteckigem Querschnitt und n-Strom-Windungen

Innenradius  $\rho_1$ , Außenradius  $\rho_2$ , Höhe l, Strom rechtshändig zum Fluß, Ausrichtung in z-Richtung

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \text{ im Torus-Ring, sonst 0; } \Phi_Q = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{Querschnittsfluß}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{Selbstinduktivität}$$

- Durchflutungsgesetz

(Bsp.6.4.2, S.209)

---

## Weicheisenring mit Luftspalt, N-Strom-Windungen

$$\vec{B} = \frac{Ni}{\frac{l_E}{\mu} + \frac{l_L}{\mu_0}} \vec{e}_\alpha \text{ innerhalb des Ringes (auch im Luftspalt)}$$

$$L = \frac{N^2 a}{\frac{l_E}{\mu} + \frac{l_L}{\mu_0}}$$

- Maxwell integral

(A79=9.3)



## Metallkugel mit Hohlraum und Ladung Q

- Q liegt als Flächenladung auf der äußeren Fläche, Grund: Maxwell 3.41a,b und kein E-Feld im Metall !

$$\rho_{\text{Hohlraum}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{Potential des Hohlraumes bez. Fernkugel; Grund: } \varphi \text{ und } E \text{ sind stetig, } E=0 \text{ im Metall}$$

- E=0 im Metall, Stetigkeit von E am Hohlraumrand, Poisson Ansatz und RB

## von einem homogenen E-Feld Influenzierte Metallkugel

- Ersatzpunktdipol für leitende Kugel in einem nichtleitendem Medium mit äußerem E-Feld;

äußeres hom. E-Feld ( $E_0$ ) zeigt in z-Richtung, Punktdipol ist im Ursprung und zeigt ebenfalls in z-Richtung, Kugel habe Radius R

- Überlagerung der Felder ergibt, wenn die Tangentialkomponente am Rand der leitenden Kugel verschwinden soll ( das E-Feld tritt aus einem Metall (fast) immer senkrecht raus) für den die Kugel ersetzenden, die Randbedingungen erfüllenden Punkt-Dipol:

$$p_z = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

$$\vec{E}_{\text{Kugelrand}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{Dipol}} = \vec{e}_r \cdot \cos\vartheta \cdot 3E_0 \quad \text{nur an der Kugeloberfläche, keine Tangentialkomponente, also RB erfüllt}$$

- Gesamtes E-Feld im Raum durch Überlagerung der einzelnen Komponenten

(A46)

$\sigma_{\text{inf}} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta$  auf der Oberfläche der Metallkugel influenzierte Flächenladung

$$\vec{E}_{\text{ges}} = E_0 \left[ \vec{e}_r \cos\vartheta \cdot \left( 1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) + \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \right]$$

- einfache E-Feldüberlagerung

(A50)

$$\varphi = E_0 \left[ \frac{R^3}{r^2} - r \right] \cos\vartheta \quad \text{außerhalb der Kugel !}$$

- Poisson-Ansatz, Eindeutigkeit der Lösung, Randbedingungen fürs Potential

(Bsp.5.5.2b, S.176)

## elektrisch polarisierte Kugel mit P in z-Richtung, Kugel liegt im Koordinatenursprung, Radius R,

Polarisation in z-Richtung

$$\vec{E}^{(pol)} = \begin{cases} -\frac{P_0}{3\epsilon_0} & r < R \\ \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos\vartheta \cdot \vec{e}_r + \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta) & r > R \end{cases} \quad (8.13, \text{S.254, Bsp.8.2.1a})$$

- aus Vergleich mit influenzierter Kugel

## von einem homogenen E-Feld $E_0$ polarisierte, homogen dielektrische ( $\epsilon$ ) Kugel im Vakuum

## von einem homogenen E-Feld polarisierte, homogen dielektrische ( $\epsilon_1$ ) Kugel in einem Dielektrikum $\epsilon_2$

man ersetze nur  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon_2$  und  $\epsilon$  durch  $\epsilon_1$ , oder umgekehrt, je nach Notwendigkeit !

Kugelmittelpunkt liegt im Ursprung, Radius R

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_{\text{pol}} = \frac{-\vec{P}_0}{3\epsilon_0} \quad \text{nur in der Kugel !} \quad (8.13a, \text{S.254})$$

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 \quad \text{nur in der Kugel, außen keine Polarisation} \quad (8.46, \text{S.267})$$

$$\vec{E} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 \quad \text{nur in der Kugel !}$$

$$\vec{E}_{\text{pol}} = \begin{cases} -E_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot \vec{e}_z & r < R \\ \frac{R^3}{r^3} E_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta) & R < r \end{cases} \quad \text{durch die Polarisation hervorgerufenen Feld}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \cos\vartheta \quad (\text{hier muß das erste } \epsilon_0 \text{ unbedingt stehen bleiben!, aus Grenzbedingungen!})$$

•  $E_{\text{ges}}$ - Feld siehe S.267

- siehe Beispiel

(Bsp8.5.2c, S.266)

- aus verschiedenen Beispielen zusammengestückt

(A71)

## Nichtleitende Kugel in einem leitendem Medium mit äußerem, homogenem J-Feld, Ersatz-Punktdipol

äußeres J-Feld ( $J = \kappa E_0$ ) zeigt in z-Richtung, Punktdipol ist im Ursprung und zeigt ebenfalls in z-Richtung, Kugel habe Radius R

- Überlagerung der Felder ergibt, wenn die Radialkomponente am Rand der nichtleitenden Kugel verschwinden soll (Es fließt ja kein Strom in die Kugel hinein!) für den die Kugel ersetzenden Dipol:

$$p_z = -2\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

$$\vec{E}_{rand} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{Dipol} = \vec{e}_\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{-3}{2} E_0 \quad \text{nur an der Kugeloberfläche, keine Radialkomponente, also RB erfüllt}$$

- Gesamtes E-Feld und  $J=\kappa E$ -Feld im Raum außerhalb durch Überlagerung der einzelnen Komponenten (A46)

hom. E-Feld Kompensation, Radialkomponente des äußeren E-Feldes an einer Kugel kompensieren

siehe: Influenzierte Metallkugel (A46)

hom. E-Feld Kompensation, Tangentialkomponente des äußeren E-Feldes einer Kugel kompensieren

siehe: Nichtleitende Kugel in einem leitendem Medium mit äußerem J-Feld, Ersatz-Punktdipol (A46)

magnetisch polarisierte Kugel, Kugel liegt im Koordinatenursprung, Radius R, Magnetisierung  $M_0$  in z-Richtung  
H-Feld korrespondiert mit E-Feld einer elektrisch pol. Kugel; dies folgt aus Vergleich von Wirbel und Quellen.

Ergebnis:  $M_0 \cong \frac{P_0}{\epsilon_0}$ , dieses oben in el. pol. Kugel einsetzen und man erhält statt E-, das H-Feld

- aus Vergleich mit elektrisch polarisierter Kugel nach Bsp. 8.2.1a, S.252; aus Klausur Herbst '90

magnetisch permeable Kugel, Radius R, mit  $\mu$ , Kugel wird durch ein homogenes Außenfeld  $H_0$  magnetisiert für das Gesamtfeld in der Kugel gilt:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \text{damit also dann} \quad \vec{M} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}$$

Die Beziehung zwischen Gesamtfeld H in der Kugel und dem verursachendem Feld  $H_0$  außen ist, analog wie bei einer polarisierbaren Kugel ( $D=B$ ,  $E=H$ ) dann:

$$\vec{H} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 \quad \text{und so ist} \quad \vec{M} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0$$

Ist das Kügelschen klein, und  $H_0$  und damit M deshalb näherungsweise konstant, dann läßt sich die Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad \text{vereinfachen zu:} \quad \vec{m} = \frac{4}{3} R^3 \pi \vec{M}$$

womit das magnetische Moment der kleinen Kugel berechnet wäre

- Dualität zwischen E- und B-Feld ! (ZA41)

Corbino-Scheibe = kurzer, coaxialer Zylinder mit n-leitendem Material im Zwischenraum A5.1

- Widerstand ist B-Feld abhängig

- Rechnung durch gegebene Anleitung

- Ohmsches Gesetz (A37=A5.1)

$$R = \frac{\ln \rho_2 / \rho_1}{2\pi\sigma l} \quad \text{Widerstand der Scheibe bei } B=0$$

- integrale Maxwell und ohmsches Gesetz, einfache Symmetrieüberlegungen  $\rightarrow$  Ansatz für J (A42)

„zerfließende Raumladung in einem Metall“ geg, Raumladung  $\rho(t=0,r)$ , nach welchem Gesetz zerfließt sie ?

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \rho(t, \vec{r}) = 0 \quad \rho(t, \vec{r}) = \rho(t=0, \vec{r}) \cdot e^{-t/T} \quad T = \frac{\epsilon_0}{\kappa} \approx 10^{-19} \text{ sec in Cu}$$

- aus Kontinuitätsgleichung, ohmschem Gesetz für ruhende Körper und Maxwell 3.1 (A36)

## Apolonius - Ansatz

Soll von den Punkten Q' und Q gelten:

$r = k \cdot r'$  dann gelten folgende Beziehungen

$$k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

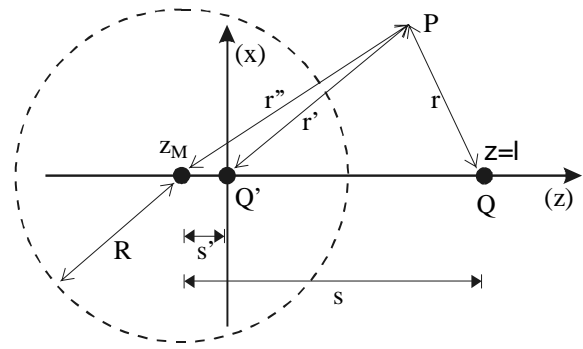
$$s s' = R^2 \quad s = \frac{k^2 l}{k^2 - 1} \quad s' = \frac{l}{k^2 - 1}$$

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad z_M = -s' = \frac{-l}{k^2 - 1}$$

bei Punktladung und influenzierter Metall-Kugel gilt

$$q' = -\frac{R}{s} q \quad q' = -\frac{1}{k} q \quad k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

$$Q_0 = q' + q'' \quad \varphi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0}{R} + \frac{q}{s} \right)$$



Alle gesuchten Punkte mit einem konstanten k sind Kreise mit Radius R und Mittelpunkt bei  $z_M$ .

## Bemerkungen zum HALL - Effekt aus Anhang von ZA24

Zunächst ist zu unterscheiden, ob nur p, oder nur n-Leitung

**p-Leitung**

$$\vec{F}_p = e(\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

$$\vec{u}_p = \frac{b_p}{e} \vec{F}_p = b_p (\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

$$\vec{J}_p = pe\vec{u}_p = pe b_p (\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

also

$$\vec{J}_p = \underbrace{pe b_p}_{\kappa_p} \vec{E} + b_p \vec{J}_p \times \vec{B}$$

$$R_H = \frac{b_p}{\kappa_p} = \frac{1}{pe} > 0$$

**n-Leitung**

$$\vec{F}_n = -e(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

$$\vec{u}_n = \frac{b_n}{e} \vec{F}_p = -b_n (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

$$\vec{J}_n = n(-e)\vec{u}_n = neb_n (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

also

$$\vec{J}_n = \underbrace{neb_n}_{\kappa_n} \vec{E} - b_n \vec{J}_n \times \vec{B}$$

$$R_H = -\frac{b_n}{\kappa_n} = \frac{1}{-en} < 0$$

n,p jeweilige Volumenkonzentration (nichtnegativ), u jeweilige Geschwindigkeit,  $\kappa$  jeweilige Leitfähigkeit (nichtnegativ), das Vorzeichen des Hallwiderstandes ist abhängig von der Leitungsart !

Wirken beide Effekt zusammen gilt weiterhin:

mit  $\vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_n$ ,

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \quad \text{wobei } \vec{E}_{\parallel} \parallel \vec{J} \text{ ist,}$$

$$\text{und } \kappa = \kappa_p + \kappa_n$$

ergeben sich die rechts stehenden Zusammenhänge:

$$\vec{J} = (\kappa_n + \kappa_p) \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{J}_p = \frac{\kappa_p}{\kappa_p + \kappa_n} \vec{J} \quad \text{und} \quad \vec{J}_n = \frac{\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_p} \vec{J}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \underbrace{\frac{pb_p^2 - nb_n^2}{e(pb_p + nb_n)^2}}_{R_H} \vec{J} \times \vec{B}$$

$$\text{also } R_H = \frac{pb_p^2 - nb_n^2}{e(pb_p + nb_n)^2}$$

## D. Mathematische Formeln

... aus dem Bronstein S.46, 47

### Wichtige Integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}^3} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C_2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}^3} dx = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \cos(2ax)$$

$$\int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$