Systemtheorie

für Grundlagen der Elektrotechnik

von Gerald Meier

1 Aufstellen von Zustandsgleichungen

1.1 direktes Verfahren

Aufstellen von Knoten- und Maschengleichungen und anschließendes Umformen

1.2 algebraisches Verfahren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ A_{12} = \left.\frac{\dot{z}_1}{z_2}\right|_{x=0, z_1=0} \qquad c_1 = \left.\frac{y}{z_1}\right|_{x=0, z_2=0} \quad \text{u.s.w.}$$

1.3 topologisches Verfahren

Normalbaum enthält:
- alle Spannungsquellen
- möglichst viele Kapazitäten
- möglichst viele Widerstände
- [- evtl. einige Induktivitäten]

Knoten- und Maschengleichungen

$$\Rightarrow \mathbf{M}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{N}\mathbf{z} + \mathbf{K}\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}}_{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}}_{\mathbf{B}}\mathbf{x}$$

2 Umformungen

2.1 adjungiertes System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{b} \cdot x \\ y &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z} + d \cdot x \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} + \mathbf{c} \cdot x \\ y &= \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{z} + d \cdot x \end{aligned}$$

2.2 Differentialgleichungen in Zustandsgleichungen

$$\dddot{y} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_0 y = \beta_2 \ddot{x} + \beta_1 \dot{x} + \beta_0 x$$

2.2.1 Steuerungsnormalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot x$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} + 0 \cdot x$$

$$H(p) = \frac{y}{x} = \beta_3 + \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} + \beta_3 \cdot \mathbf{x}$$

2.2.2 Beobachtungsnormalform

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot x \qquad \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{q-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{q-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{q-1} \\ \beta_{q-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z} + 0 \cdot x$$

$$H(p) = \frac{y}{x} = \frac{\beta_2 p^2 + \beta_1 p + \beta_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} = \frac{\gamma_1}{p} + \frac{\gamma_2}{p^2} + \frac{\gamma_3}{p^3} + \frac{\gamma_4}{p^4}$$

2.2.3 ZGL in Übertragungsfunktion, Impuls- und Sprungantwort

Übertragungsfunktion: $H(p) = \dfrac{Y}{X} = \mathbf{c}^T \cdot (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{b} + d$

Impulsantwort: $h(t) = \mathbf{c}^T \cdot e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{b} \cdot s(t) + d \cdot \delta(t)$

Sprungantwort: $a(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{b} \cdot s(t) + d \cdot \delta(t)$

$$a(0) = H(\infty)$$
$$a(\infty) = H(0)$$

3 Arbeiten mit Zustandsgleichungen

3.1 Lineare Transformation des Zustandsraumes

$$\mathbf{z} = \mathbf{M} \cdot \zeta \qquad \zeta = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{z} \qquad \tilde{\mathbf{A}}^n = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{M}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \cdot \zeta + \underbrace{\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{C} \cdot \mathbf{M}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \cdot \zeta + \underbrace{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{x}$$

3.2 Lösen der Zustandsgleichungen

Übergangsmatrix $\Phi = e^{\mathbf{A}t}$

vollständige Lösung $\mathbf{z}(t) = \Phi(t - t_0) \cdot \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \sigma) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(\sigma) d\sigma$

3.3 Berechnung der Übergangsmatrix

3.3.1 CAYLEY-HAMILTON

CAYLEY-HAMILTON: $e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0(t) \cdot \mathbf{E} + \alpha_1(t) \cdot \mathbf{A} + \ldots + \alpha_{q-1}(t) \cdot \mathbf{A}^{q-1}$

Minimalpolynom: $e^{p_\mu t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot p_\mu + \ldots + \alpha_{q-1}(t) \cdot p_\mu^{\,q-1}$ p_μ: Eigenwerte

bei konjugiert komplexen Eigenwerten $p_\mu = \sigma \pm j\gamma$:

$$e^{\sigma t} \cdot \cos\gamma t = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot \sigma + \alpha_2(t) \cdot (\sigma^2 - \gamma^2) + \alpha_3(t) \cdot (\sigma^3 - 3\sigma\gamma^2) + \ldots$$
$$e^{\sigma t} \cdot \sin\gamma t = \alpha_1(t) \cdot \gamma + \alpha_2(t) \cdot 2\sigma\gamma + \alpha_3(t) \cdot (-\gamma^3 + 3\sigma\gamma^2) + \ldots$$

$\rightarrow \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$ aus Minimalpolynom bei mehrfachen Eigenwerten weitere Gleichungen durch $\frac{de^{p_\mu t}}{dp_\mu}$ erforderlich

$\rightarrow e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \ldots$

3.3.2 Diagonalisierung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{p_n t} \end{bmatrix}$$

p_μ: einfache Eigenwerte von **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{q-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Modalmatrix } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} p_1^{\,0} & p_2^{\,0} & \cdots & p_n^{\,0} \\ p_1^{\,1} & p_2^{\,1} & \cdots & p_n^{\,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{\,n} & p_2^{\,n} & \cdots & p_n^{\,n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\Phi}(t) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{p_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{p_n t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{M} \cdot e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \cdot \mathbf{M}^{-1}$$

$\rightarrow$ UNBEHAUEN: „Systemtheorie“ Seite 85

3.3.3 LAPLACE-Transformation

$\hat{\Phi}(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \qquad \mathbf{z}(0+) \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftarrow$ System steurbar

4 Steuer- und Beobachtbarkeit

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bx} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{Cz} + \mathbf{Dx}$$

4.1 Steuerbarkeit

Zustand $\mathbf{z}(t)$ kann von einem beliebigen Anfangszustand $\mathbf{z_0}(t)=\mathbf{z}(t_0)$ bei Wahl eines geeigneten Eingangssignals $\mathbf{x}(t)$ in endlicher Zeit in einen willkürlich wählbaren Endzustand $\mathbf{z_1}(t)=\mathbf{z}(t_1)$ überführt werden.

Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{U} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{q-1}\mathbf{B}]$

steuerbar $\Leftrightarrow$ Zeilen von $e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{B}$ linear unabhängig

$\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(\mathbf{U}) = \mathrm{Rg}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{q-1}\mathbf{B}] = q$

1 Eingangssignal:

$\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(\mathbf{U}) = \mathrm{Rg}[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A^2b} \quad \ldots \quad \mathbf{A^{q-1}b}] = q$

$\Leftrightarrow \det(\mathbf{U}) = \det[\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A^2b} \quad \ldots \quad \mathbf{A^{q-1}b}] \neq 0$

nicht steuerbar $\Leftrightarrow$ nicht alle Eigenschwingungen sind von außen erregbar
$\rightarrow$ kein Beitrag zum Übertragungsverhalten und nicht in Übertragungsfunktion enthalten
$\Rightarrow$ Grad der Übertragungsfunktion sinkt

4.2 Beobachtbarkeit

Bei Zulassen eines beliebigen Anfangszustands $\mathbf{z_0}(t)=\mathbf{z}(t_0)$ existiert ein endlicher Zeitpunkt $t_1 > t_0$, so daß bei Kenntnis des Eingangssignals $\mathbf{x}(t)$ und des Ausgangssignals $\mathbf{y}(t)$ im Intervall $t_0 \leq t \leq t_1$ der Anfangszustand eindeutig bestimmt werden kann.

Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{q-1} \end{pmatrix}$

beobachtbar $\Leftrightarrow$ Spalten von $\mathbf{C}\cdot e^{\mathbf{A}t}$ linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \mathrm{Rg}(\mathbf{V}) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}^{q-1} \end{pmatrix} = q$$

1 Ausgangssignal:

$$\Leftrightarrow \det(\mathbf{V}) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\cdot\mathbf{A}^{q-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

5 Stabilität

charakteristisches Polynom: $D(p) := \det(p\mathbf{E}-\mathbf{A}) = p^q + a_1 p^{q-1} + a_2 p^{q-2} + \ldots + a_q$

asymptotische Stabilität $\Leftrightarrow$ D(p) HURWITZ-Polynom

5.1 HURWITZ-Verfahren

(geeignet, falls a_μ als Formelausdrücke in den Systemparametern gegeben)

HURWITZ- Determinanten: $\Delta_\mu = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{2\mu-1} & a_{2\mu-2} & & \cdots & & a_\mu \end{vmatrix}$

Satz: Das Polynom $D(p)$ ist genau dann ein HURWITZsches Polynom, wenn alle HURWITZ-Determinanten positiv sind, also

$\Delta_\mu > 0 \qquad (\mu = 1,2,\ldots,q)$

5.2 ROUTHsches Verfahren

(geeignet, falls a_μ numerisch gegeben)

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
d_1 & d_2 & 0 & & \\
e_1 & e_2 & 0 & & \\
f_1 & 0 & & & \\
g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad ,...$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_4}{b_1} \qquad ,...$$

$$f_1 = \frac{e_1 d_2 - d_1 e_2}{e_1} \qquad g_1 = e_2$$

<u>Satz:</u> Das Polynom $D(p)$ mit positiven Koeffizienten a_μ $(\mu=0,1,...,q)$ ist genau dann ein HURWITZsches Polynom, wenn alle Koeffizienten, die an erster Stelle der q+1 Zeilen des ROUTH-Schemas stehen, positiv sind. Dies heißt, da die a_μ ohne dies positiv sind:

$$b_1 > 0, \quad c_1 > 0, \ldots, \quad d_1 > 0, \quad e_1 > 0, \quad f_1 > 0, \quad g_1 > 0$$