Stochastik Formeln

von Gerald Meier

1 Grundbegriffe und Operationen

unmögliches Ereignis $\emptyset$
sicheres Ereignis Ω

A impliziert B $A \subseteq B$
Gleichheit $A = B$

nicht A $\overline{A}$
A und B $A \cap B$
A oder B $A \cup B$
A ohne B $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

disjunkt $A \cap B = \emptyset$

de Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Elementarereignis $\omega \in \Omega$

Potenzmenge von Ω $P(\Omega)$

$\mathsf{A} \subseteq P(\Omega)$ σ-Algebra, falls $\Omega \in \mathsf{A}$
$A \in \mathsf{A}$ und $\overline{A} \in \mathsf{A}$
$A_i \in \mathsf{A} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathsf{A}$

Ereignisraum ER endlich, falls $|\Omega| = n < |N|$
abzählbar, falls $|\Omega| = |N|$
diskret, falls $|\Omega| \leq |N|$
kontinuierlich, falls $|\Omega| = |R|$

2 Wahrscheinlichkeit

2.1 axiomatische Definition

$0 \leq p(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathsf{A}$
$p(\Omega) = 1$
$A_i \in \mathsf{A}$ für $i \in N$ und $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq k$, dann gilt $p\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p(A_i)$

2.2 Wahrscheinlichkeitsraum WR

$p(\emptyset) = 0$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$A \subseteq B \rightarrow p(A) \leq p(B)$
$A_i \in \mathsf{A}$ für $i \in N$ $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \quad \rightarrow p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} p(A_i)$
$A_i \in \mathsf{A}$ für $i \in N$ $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \quad \rightarrow p\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} p(A_i)$
(Ω, A, p) WR $A_1, \ldots, A_n \in \mathsf{A}$

$$\rightarrow p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} p(A_i \cap A_k) + \sum_{\substack{i,k,s=1 \\ i<k<s}}^{n} p(A_i \cap A_k \cap A_s) - \ldots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$p\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i p(A_i)$$

2.3 diskrete Wahrscheinlichkeitsräume WR

Gleichverteilung / LAPLACE-Verteilung

$|\Omega| = N \qquad p(\omega) = \frac{1}{N} \quad \forall \omega \in \Omega \qquad p(A) = \frac{|A|}{N}$

Geometrische Verteilung

$p(k) = (1-p)^k \cdot p$

2.4 kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume WR

Gleichverteilung

$p([\alpha, \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \qquad a \leq \alpha \leq \beta \leq b \in \mathbb{R}$

3 Bedingte Wahrscheilichkeit

3.1 Definition

$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

3.2 Anwendungen

3.2.1 Multiplikationssatz

$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B) \qquad p(A) > 0 \quad p(B) > 0$

$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

3.2.2 MARKOV-Kette

$A_1 \ldots A_n$ mit $p(A_k|A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1}) = p(A_k|A_{k-1}) \rightarrow$ MARKOV-Kette

$\rightarrow p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2|A_1) \cdot p(A_3|A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n|A_{n-1})$

3.2.3 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$A_1 \ldots A_n$ Zerlegung von Ω

$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(A_k) \cdot p(B|A_k)$

3.2.4 Pfadregeln

1. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Pfades ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Äste des Pfades
2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten derjenigen Pfade, die das Ereignis bilden.

3.2.5 Formel von BAYES

$(\Omega, \mathcal{A}, p)$ WR $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ Zerlegung von Ω $p(A_k) > 0,\ B \in \mathcal{A},\ p(B) > 0$

$p(A_k|B) = \frac{p(A_k) \cdot p(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} p(B|A_j) \cdot p(A_j)} \qquad$ für $k = 1 \ldots n$

3.2.6 Stochastische Unabhängigkeit

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

A und B unabhängig $\rightarrow$ $p(A) = p(A|B)$, $p(B) = p(B|A)$

$$p\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} p(A_j)$$

3.3 BERNOULLI-Verteilung

$p(\omega) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

4 Zufallsvariablen

5 Diskrete Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion VF: $F_X(x) = \sum_{k: x_k \le x} p_k$

$$p(x_m \le X \le x_n) = \sum_{k=m}^{n} p_k$$

5.1 Gleichverteilung / LAPLACE-Verteilung

$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $\qquad$ $p_k = p(X = x_k) = \frac{1}{n}$ $\qquad$ k=1,...,n

Anwendung: Bei Zufallsvariablen ZVa mit endlich vielen Werten, die keinen bevorzugen.

5.2 Geometrische Verteilung

$X(\Omega) = N_0$ $\qquad$ $p_k = p(X = k) = p \cdot (1-p)^k$

Anwendung: ∞-stufiges BERNOULLI-Experiment.

5.3 Binominalverteilung

$X(\Omega) = N_0$ $\qquad$ $p_k = p(X = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Anwendung: n-stufiges BERNOULLI-Experiment (Ziehen mit Zurücklegen). Es werden n Teile herausgegriffen. Die Wahrscheinlikeit ein Ausschußteil zu ziehen ist p. Es weren k Ausschußteile gezogen.

Wahrscheinlichste Anzahl von Erfolgen: für festes n, gesucht k bei dem p maximal wird

$k = k_{max} = [(n+1) \cdot p]$ - Nachkommastellen werden abgeschnitten

$(n+1) \cdot p \in N \rightarrow k_{max,1} = (n+1) \cdot p$, $k_{max,2} = k_{max,1} - 1$

Wahrscheinlichkeit dafür, daß Erfolgsanzahl aus Intervall stammt: $p(k_1 \le X \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

5.4 POISSON-Verteilung

$X(\Omega) = N_0$ $\qquad$ $p_k = p(X = k) = p(k; \lambda) := \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ $\qquad$ $\lambda > 0$

Für n>>1 und p<<1 ist $b(k; n, p) \approx p(k; n \cdot p)$

Anwendung: Die POISSON-Verteilung wird als Näherung für die Binominaverteilung verwendet - unter oben aufgeführten Voraussetzungen.

5.5 Hypergeometrische Verteilung

$N, M, n \in \mathbb{N}, N - M \geq 0$

$$X(\Omega) = \mathbb{N}_0 \qquad p_k = p(X = k) = h(k; n, M, N - M) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$p_k \neq 0$ nur für $k \leq n, k \leq M, n - k \leq N - M$

Anwendung: Stichproben ohne Rückgabe: Der Posten umfaßt N Teile - darunter M Ausschußteile. n Teile werden entnommen, darunter k Ausschußteile.

Grenzwertsatz: $\lim\limits_{\substack{N \to \infty \\ M = pN}} h(k; n, M, N - M) \approx b(k; n, M/N)$

5.6 MOIVRE-LAPLACE-Asymptotik

STIRLING-Formel: $n! \cong n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$ für $n \to \infty$

Definitionen: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ GAUSS-/Normalfunktion

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$\mathrm{erf}(x) = G(x) - \frac{1}{2}$ Fehlerfunktion

Satz: $G(\infty) = 1 \qquad G(-x) = 1 - G(x)$

$$G(x) \cong 1 - \frac{1}{x} \cdot \varphi(x)$$

MOIVRE-LAPLACE-Asymptotik

Mit $0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ gilt für $n, k \to \infty$

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \cong \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Damit erhält man gute Näherungen für $npq > 9$. Damit gilt für BERNOULLI-Experimente

$$p(k_1 \leq X \leq k_2) \cong G\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - G\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

oder genauer

$$p(k_1 \leq X \leq k_2) \cong G\left(\frac{k_2 - np + 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right) - G\left(\frac{k_1 - np - 0{,}5}{\sqrt{npq}}\right)$$

5.7 BERNOULLI-Gesetz der großen Zahl

n-stufiges BERNOULLI-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. k Anzahl des Eintretens eines bestimmten Ereignisses, $h_n = k/n$ die relative Häufigkeit. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$p(|h_n - p| \leq \varepsilon) \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

6 Stetige Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion: $F_X = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ Dichte(-funktion): f

$p(a \leq X \leq b) = p(a < X \leq b) = \ldots = F_X(b) - F_X(a)$

Dichte symmetrisch bezüglich a $\to$ $p(X \leq a - x) = p(a + x \leq X)$ $\to$ $p(a - x) = p(a + x)$

6.1 Normalverteilung

ZVa X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2 $(\mu, \sigma > 0)$ bzw. $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt:

Dichte: $f_X(x) := \varphi(x;\mu,\sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ $\qquad \varphi(x;\mu,\sigma^2)$ symmetrisch zu $x = \mu$

Verteilungsfunktion: $F_X(x) := \Phi(x;\mu,\sigma^2) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(x;\mu,\sigma^2)dx = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$p(a < X < b) = G\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ $\qquad p(|X-\mu| < k\sigma) = 2G(k) - 1$

$p(|X-\mu| < \sigma) = 0{,}683$ $\qquad p(|X-\mu| < 2\sigma) = 0{,}955$ $\qquad p(|X-\mu| < 3\sigma) = 0{,}997$

Anwendung: Die Zufallsvariable ZVa entsteht durch Überlagerung einer großen Anzahl unabhängiger Effekte, wobei jeder nur einen kleinen Einfluß auf die ZVa hat (Meßfehler,...).

6.2 Exponentialverteilung

ZVa exponentialverteilt mit Parameter α $(\alpha > 0)$:

Dichte: $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \alpha \cdot e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

$p(X \leq x + h | X \geq x) = p(X \leq h)$ $\quad \forall x, h > 0 \Leftrightarrow$ X ist exponentialverteilt

Anwendung: Lebensdauer von Schaltelementen, radioaktiver Zerfall, ...

6.3 Funktionen von ZVa mit Dichten

$Y = g(X)$ $\qquad f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} p(g(X) \leq x)$

1.) $g' > 0$ $\quad \to \quad f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{f_X(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))}$

2.) $g' \neq 0$ $\quad \to \quad f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{f_X(g^{-1}(x))}{|g'(g^{-1}(x))|}$

3.) $g(x) = x^2$ $\quad \to \quad f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

$\to$ weiteres Seite 35

6.4 ZVa vom gemischten Typ

ZVa vom gemischten Typ $\leftrightarrow$ nicht stetig und diskret

Sprungstellen x_k mit Sprunghöhe: $p_k = p(X = x_k)$

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt + \sum_{k: x_k \leq x} p_k$

7 Charakteristische Größen

7.1 Erwartungswert

7.1.1 diskrete ZVa

Erwartungswert: $EX = \sum_k x_k \cdot p_k$

diskrete Gleichverteilung: $EX = \frac{1}{n} \cdot \sum_k p_k$

Binomialverteilung: $EX = n \cdot p$

Hypergeometrische Verteilung: $EX = n \cdot p = n \cdot \frac{M}{N}$

POISSON-Verteilung: $EX = \lambda$

7.1.2 stetige ZVa

Erwartungswert: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$

Gleichmäßige Verteilung: $EX = \frac{a+b}{2}$

Normalverteilung: $EX = \mu$

Exponentialverteilung: $EX = \frac{1}{\alpha}$

7.1.3 ZVa vom gemischten Typ

$x_k = k \cdot h$

Mittelwert: $\overline{X} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot p_k$

Erwartungswert: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \lim_{h \to \infty} \overline{X}_h$

7.1.4 Rechenregeln

$E(aX+b) = aEX + b$

$E(X - EX) = 0$ $X \to$ X-EX heißt zentrieren

diskrete ZVa: $E(g(X)) = \sum_i g(x_i) \cdot p_i$

stetige ZVa: $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$

$X \to$ X-EX heißt **Zentrierung**

7.2 Varianz und Standardabweichung

Varianz: $D^2X := E(X - EX)^2$

Standardabweichung: $\sigma_X := \sqrt{D^2X}$

7.2.1 diskrete ZVa

diskrete Gleichverteilung: $D^2X := \frac{1}{n}\sum_k {x_k}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_k x_k\right)^2$

Binomialverteilung: $D^2X := n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypergeometrische Verteilung: $D^2X := n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$ $\quad p = \frac{M}{N}$

POISSON-Verteilung: $D^2X = \lambda$

7.2.2 stetige ZVa

stetige Gleichverteilung: $D^2X := \frac{(b-a)^2}{12}$

Normalverteilung: $D^2X := \sigma^2$

Exponentialverteilung: $D^2X := \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2$

7.2.3 Rechenregeln

$D^2X := E\left(X^2\right) - (EX)^2$

$D^2(aX+b) := a^2 \cdot D^2X \qquad D^2\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) = 1$

$E(X-c)^2$ = minimal $\Leftrightarrow$ c = EX

$X \to \frac{X}{\sigma_X}$ heißt **Normierung**

$X \to \frac{X-EX}{\sigma_X}$ heißt **Standardisierung**

7.2.4 TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung

$p\left(|X-EX| \geq c\right) \leq \frac{D^2X}{c^2} \qquad p\left(|X-EX| > c\right) < \frac{D^2X}{c^2}$

$p\left(|X-EX| \leq c\right) > 1 - \frac{D^2X}{c^2} \qquad p\left(|X-EX| < c\right) \geq 1 - \frac{D^2X}{c^2}$

Weitere charakteristische Größen $\to$ Skript Seite 39 ff

8 Zufallsvektoren

8.1 Definition und Verteilungsfunktion

n-dimensionaler Zufallsvektor n-ZVe: $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} : \Omega \to R^n$

$x < y \Leftrightarrow x_k < y_k \ \forall k = 1, \ldots, n$

$X < x := \{\omega | X(\omega) < x\}$

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = p(X \leq x)$ für $x \in R^n$

Sätze: $0 \leq F_X(x) \leq 1$

F_X ist in jeder Variablen x_k monoton wachsend

F_X ist in jeder Variablen x_k rechtsseitig stetig

$\lim_{x_k \to -\infty} F_X(x) = 0$ für alle k

$\lim_{x_k \to \infty} F_X(x) = 1$ für alle k

Definitionen: $F_X = \lim_{y,u \to \infty} F_Z(x,y,u)$ Rand- oder Marginalverteilung

$F_{(X,Y)} = \lim_{u \to \infty} F_Z(x,y,u)$

$F_X(x|y,u) = p(X \leq x | Y = y, U = u)$ bedingte Verteilungsfunktion von X

ZVa $X_1,...,X_n$ unabhängig $F_Z(x_1,\ldots,x_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$

8.2 Diskrete n-ZVe

o.B.d.A. n=2

Einzelwahrscheinlichkeit EW: $p_{ik} = p(X = x_i, Y = y_k)$

Verteilungsfunktion VF: $F_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{i,k: x_i \le x, y_k \le y} p_{ik}$

EW der Randverteilung: $p_{i.} := p(X = x_i) = \sum_k p_{ik}$

$p_{.k} := p(Y = y_k) = \sum_i p_{ik}$

unabhängige X und Y $\Leftrightarrow$ $p_{ik} = p_{i.} \cdot p_{.k}$

8.3 (Absolut-) Stetige ZVe

o.B.d.A. n=2

Verteilungsfunktion VF: $F_Z(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_Z(x,y)\,dy\,dx$

Dichte der Randverteilung: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$

Dichte der bedingten VF: $f_X(x|y) = \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$

X un Y unabhängig $\Leftrightarrow$ $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

8.4 Charakteristische Größen

o.B.d.A. n=2

Erwartungswert: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_Z(x,y)\,dx\,dy$

$Eg(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_Z(x,y)\,dx\,dy$

bei diskreten ZVa: $Eg(X,Y) = \sum_{i,k} g(x_i, y_k) p_{ik}$

Rechenregeln: $E(X_1 + \ldots + X_n) = EX_1 + \ldots + EX_n$

ZVa unabhängig $\Rightarrow$ $E(X,Y) = EX \cdot EY$

Kovarianz: $\operatorname{cov}(X,Y) = E(X - EX) \cdot E(Y - EY)$

$\rightarrow \operatorname{cov}(X,X) = D^2X$

$\rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = E(X,Y) - EX \cdot EY$

$\rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = 0 \Leftarrow$ X, Y unabhängig

$\rightarrow D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y + 2\operatorname{cov}(X,Y)$

$\rightarrow$ $X_1,...,X_n$ paarweise unabhängig $\Rightarrow$ $D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2 X_i$

Kovarianzmatrix: $B_{ik} = \operatorname{cov}(X_i, X_k)$

$\rightarrow$ Skript Seite 47

Korrelationskoeffizient: $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2X} \cdot \sqrt{D^2Y}}$

$\rightarrow |\rho(X,Y)| \leq 1$

$\rightarrow |\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ mit $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(\rho)$

$\rightarrow |\rho(X,Y)| = 0 \Leftarrow$ X und Y sind unabhängig

$\rightarrow$ ρ=0 unkorreliert, ρ>0 positiv korreliert, ρ<0 negativ korreliert

9 Grenzwerte

9.1 Konvergenz

Definitionen:

$X_n \xrightarrow{s} X$ — X_n konvergiert sicher gegen X falls $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

$X_n \xrightarrow{fs} X$ — X_n konvergiert fast sicher gegen X falls $p\left(\omega \middle| \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$

$X_n \xrightarrow{p} X$ — X_n konvergiert stochastisch gegen X falls $\lim\limits_{n\to\infty} p\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

$X_n \xrightarrow{iV} X$ — X_n konvergiert in Verteilung gegen X falls $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$

Hierarchie: $X_n \xrightarrow{s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{fs} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{iV} X$

9.2 Übersicht