

Formelsammlung Netzwerksynthese

von Stefan Döhla

13. September 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Zweipolfunktionen	2
1.1	Spezielle ZPF	2
1.1.1	LC-ZPF	2
1.1.2	RC-ZPF	2
1.1.3	RL-ZPF	3
1.2	Realisierbarkeitsbedingungen	3
1.2.1	Ausschlusskriterien:	4
1.2.2	1. Grad	4
1.2.3	2. Grad	4
1.2.4	Höherer Grad	4
1.3	Realisierung 1. Grades	4
1.4	Realisierung 2. Grades	4
1.4.1	Widerstandsreduktion	5
1.4.2	Reaktanzreduktion	5
1.4.3	Brune-Verfahren	5
1.5	Partialbruchnetzwerk nach Foster	6
1.6	Partialbruchnetzwerk nach Cauer/Kettennetzwerk	6
2	Zweitore	7
2.1	Realisierung nach Abschnitt 3.8	7
2.2	Matrix-Umwandlung	7
2.3	Realisierung der Kettenmatrix	8
2.3.1	Vorbedingungen für die Realisierbarkeit	8
2.3.2	Realisierung der Kettenmatrix mit einem Abschlusswiderstand	8
2.4	Realisierung von $H(p)$	9
2.4.1	mit 2 Widerständen	9
2.4.2	mit 1 Abschluss-Widerstand	9
3	Einheitselemente	10
3.1	Richards-Zyklus	11
3.2	Realisierung der Impedanz	11
3.3	Realisierung der Übertragungsfunktion zwischen 2 Widerständen	11
4	Allgemeines	12
4.1	Gerader und ungerader Teil	12
4.2	Entwicklungsstellen (Realisierung nach 3.8)	12
4.3	Abspalten für Dummis	12
4.4	Horner-Schema	12
4.5	Aufspalten eines geraden Polynoms 4. Grades	13

1 Zweipolfunktionen

1.1 Spezielle ZPF

1.1.1 LC-ZPF

$$Z(p) = \frac{A_0}{p} + \sum \frac{2A_\nu p}{p^2 + \omega_\nu^2} + A_\infty p$$

$$A_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [Z(p)p]$$

$$A_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[Z(p) \frac{1}{p} \right]$$

$$2A_\nu = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_\nu^2} \left[Z(p) \frac{p^2 + \omega_\nu^2}{p} \right]$$

	Impedanz	Admittanz
C_0	$\frac{1}{A_0}$	
C_ν	$\frac{1}{2A_\nu}$	$\frac{2A_\nu}{\omega_\nu^2}$
C_∞		A_∞
L_0		$\frac{1}{A_0}$
L_ν	$\frac{2A_\nu}{\omega_\nu^2}$	$\frac{1}{2A_\nu}$
L_∞	A_∞	

falls Anzahl der $L =$ Anzahl der $C \rightarrow 2$ Lösungen

falls Anzahl der $L \neq$ Anzahl der $C \rightarrow 1$ Lösung

Pole und Nullstellen alternieren auf der imaginären Achse

1.1.2 RC-ZPF

Impedanz Nahe zum Ursprung ist im Negativen der reellen Achse zunächst ein Pol. Dann alternierend. Im Unendlichen ist eine Nullstelle.

$$Z(p) = \frac{D_0}{p} + \sum \frac{D_\nu}{p + \sigma_\nu} + D_\infty$$

$$D_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [Z(p)p]$$

$$D_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} [Z(p)]$$

$$D_\nu = \lim_{p \rightarrow p_\nu} [Z(p)(p - p_\nu)]$$

$$C_0 = \frac{1}{D_0}$$

$$R_\infty = D_\infty$$

$$C_\nu = \frac{1}{D_\nu}$$

$$R_\nu = \frac{D_\nu}{\sigma_\nu}$$

Admittanz Nahe zum Ursprung ist zunächst eine NST. von $Z(p)$. Dann alternierend. Im Unendlichen ist ein Pol.

$$Y(p) = B_0 + \sum \frac{B_\nu p}{p + \sigma_\nu} + B_\infty p$$

$$\text{Partialbruchzerlegung durch } W(p) = \frac{Y(p)}{p} = \frac{B_0}{p} + \sum \frac{B_\nu}{p + \sigma_\nu} + B_\infty$$

$$B_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [Y(p)]$$

$$B_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[Y(p) \frac{1}{p} \right]$$

$$B_\nu = \lim_{p \rightarrow p_\nu} \left[Y(p) \frac{(p - p_\nu)}{p} \right]$$

$$R_0 = \frac{1}{B_0}$$

$$C_\infty = B_\infty$$

$$R_\nu = \frac{1}{B_\nu}$$

$$C_\nu = \frac{B_\nu}{\sigma_\nu}$$

1.1.3 RL-ZPF

Impedanz Nahe zum Ursprung ist zunächst eine NSt. von $Z(p)$. Dann alternierend. Im Unendlichen ist ein Pol.

$$Z(p) = B_0 + \sum \frac{B_\nu p}{p + \sigma_\nu} + B_\infty p$$

Partialbruchzerlegung durch $W(p) = \frac{Z(p)}{p} = \frac{B_0}{p} + \sum \frac{B_\nu}{p + \sigma_\nu} + B_\infty$

$$B_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [Z(p)]$$

$$B_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[Z(p) \frac{1}{p} \right]$$

$$B_\nu = \lim_{p \rightarrow p_\nu} \left[Z(p) \frac{(p - p_\nu)}{p} \right]$$

$$R_0 = B_0$$

$$L_\infty = B_\infty$$

$$R_\nu = B_\nu$$

$$L_\nu = \frac{B_\nu}{\sigma_\nu}$$

Admittanz Nahe zum Ursprung ist im Negativen der reellen Achse zunächst ein Pol. Dann alternierend. Im Unendlichen ist eine Nullstelle.

$$Y(p) = \frac{D_0}{p} + \sum \frac{D_\nu}{p + \sigma_\nu} + D_\infty$$

$$D_0 = \lim_{p \rightarrow 0} [Y(p)p]$$

$$D_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} [Y(p)]$$

$$D_\nu = \lim_{p \rightarrow p_\nu} [Y(p)(p - p_\nu)]$$

$$L_0 = \frac{1}{D_0}$$

$$R_\infty = \frac{1}{D_\infty}$$

$$L_\nu = \frac{1}{D_\nu}$$

$$R_\nu = \frac{\sigma_\nu}{D_\nu}$$

1.2 Realisierbarkeitsbedingungen

Satz 1.6

- $ReZ(j\omega) \geq 0$ für alle ω , für die $Z(j\omega)$ endlich ist
- $Z(p)$ hat in der offenen rechten Halbebene keine Pole \rightarrow Hurwitz-Test
- Alle Pole von $Z(p)$ sind einfach und haben positive Entwicklungskoeffizienten \rightarrow Partialbruchzerlegung

Satz 1.7

- $ReZ(j\omega) \geq 0$ für alle ω , für die $Z(j\omega)$ endlich ist
- $Z(p)$ hat in der offenen rechten Halbebene keine Nullstellen \rightarrow Hurwitz-Test
- Alle Pole von $Z(p)$ sind einfach und haben positive Entwicklungskoeffizienten \rightarrow Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{Z(p)}$.

Satz 1.8

- $ReZ(j\omega) \geq 0$ für alle ω , für die $Z(j\omega)$ endlich ist
- Wenn $Z(p) = \frac{P}{Q}$ dann ist $R = P + Q$ ein Hurwitz-Polynom

1.2.1 Ausschlusskriterien:

- Graddifferenz grösser als 1
- nicht gebrochen rational
- nicht reell $Z(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}$ alle a_ν, b_ν müssen reell sein!
- NSt. oder Pole in der rechten Halbebene
- mehrfache NSt. und/oder Pole auf der Im-Achse
- Pole oder NSt. nicht konjugiert komplex
- Alle Pole/NSt. auf Im-Achse aber Pole/NSt. alternieren nicht

1.2.2 1. Grad

$$Z(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_1 p + b_0}$$

$$\frac{a_0}{b_0} \neq \frac{a_1}{b_1} \\ a_0, a_1, b_0, b_1 \geq 0.$$

1.2.3 2. Grad

$$Z(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

Realisierbarkeitsbedingungen nach 1.73 a,b:

- $a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0 \geq -2\sqrt{a_0 b_0 a_2 b_2}$ oder
- $a_1 b_1 \geq (\sqrt{a_0 b_2} - \sqrt{a_2 b_0})^2$.

Wenn das “=”-Zeichen gilt, so ist keine Widerstands- und Reaktanzreduktion mehr möglich → Brune-Zyklus zur Realisierung nötig.

1.2.4 Höherer Grad

- $Z(p)$ in Reaktanz + Rest zerlegen. Dazu z.B. Pol bei 0 bzw. ∞ abspalten. → Reaktanz ist immer ZPF, dann muss man nur noch testen, ob der Rest eine ZPF ist. (wie bei 2. Grad, ...)
- Satz 1.6 / 1.7 / 1.8

1.3 Realisierung 1. Grades

Realisierung hängt davon ab, ob $\frac{a_0}{b_0}$ grösser oder kleiner als $\frac{a_1}{b_1}$ ist. Realisierung auf S.47.

1.4 Realisierung 2. Grades

Wenn ein Pol oder eine Nullstelle auf der IM-Achse vorhanden sind, so muss zuerst eine Reaktanzreduktion durchgeführt werden. Bedingungen 1.73 a,b beachten!

1.4.1 Widerstandsreduktion

Hierzu muss man zunächst das Minimum von $Re(Z(j\omega))$ herausfinden. $Re(Z(j\omega)) = G(j\omega)$. Wenn sich eine Nullstelle in dieser Funktion ergibt, so ist $Z(p)$ bereits widerstandsreduziert.

$Z_0(p) = Z(p) - R_m$, wobei $R_m = \text{Min}(Re Z(j\omega_0))$ ist.

Falls das Minimum der Funktion in 0 oder ∞ auftritt, so kann im nächsten Schritt gleich wieder eine Reaktanz abgespalten werden, falls auch $Im Z(j\omega) = 0$.

Möglichkeiten der Widerstandsreduktion:

- Minimum in 0 oder ∞
Widerstand mit $\frac{a_n}{b_n}$ abspalten und danach schauen, ob der Rest noch eine ZPF ist. Wenn sich der Rest durch Reaktanz-Reduktion zerlegen lässt $\rightarrow Z_1$ ist noch immer eine ZPF
- Minimum nicht bei 0 oder ∞
Zur Admittanz übergehen und jetzt testen, ob in 0 oder ∞ ein Minimum von $Re Z$ ist. Immer beachten, wo man sich befindet (Admittanz oder Impedanz).
- beim 2. Grad
Durch Einsetzen in die Realisierungsbedingungen folgt: $(a_1 - b_1 r)b_1 \geq \left(\sqrt{(a_0 - b_0 r)b_2} - \sqrt{(a_2 - b_2 r)b_0} \right)$
- Durch Ableiten herausfinden, wo sich das absolute Minimum der Funktion befindet

1.4.2 Reaktanzreduktion

$$Z(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

- $b_0 = 0 \rightarrow Z(p)$ hat einen Pol in $p = 0$
- $b_0 = 0, a_2 = 0 \rightarrow Z(p)$ hat einen Pol in $p = 0$ und eine NSt. in $p = \infty \rightarrow$ Realisierung als Impedanz durch einen RC-ZP. Als Admittanz durch einen RL-ZP.
- $b_0 = 0, b_2 = 0 \rightarrow Z(p)$ hat Pole in $p = 0, p = \infty \rightarrow$ Reihenschaltung von Widerstand, Induktivität und Kapazität.
- $b_2 = 0 \rightarrow Z(p) = \frac{a_2}{b_1} p + \frac{(a_1 - b_0 \frac{a_2}{b_1})p + a_0}{b_1 p + b_0}$
- $b_1 = 0 \rightarrow Z(p) = \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1 p}{b_2 p^2 + b_0}$

1.4.3 Brune-Verfahren

Falls keine Widerstands- und Reaktanzreduktion mehr möglich ist, muss ω_0 zuerst bestimmt werden (falls nicht schon bei der Widerstandsreduktion geschehen). Dazu kann man den geraden Teil hernehmen: $Re(Z(j\omega)) = G(j\omega)$. Einfacher geht's mit folgender Formel bei gebrochenen Polynomen 2. Grades:

$$a_2 b_2 \omega^4 + (a_1 b_1 - a_0 b_2 - a_2 b_0) \omega^2 = 0$$

Eine andere Formel ist:

$$\omega_0 = \left[\frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Nochmal überprüfen, ob ω_0 wirklich eine Nullstelle von $G(j\omega_0)$ ist. ω_0 muss der reelle und positive Wert der Wurzel sein! Ansonsten ist noch eine Widerstandsreduktion vorher nötig. Falls die Bedingungen aus 1.73 ein "=-"-Zeichen ergeben, so ist direkt mit dem Brune-Zyklus weiterzumachen.

1. $Z(j\omega_0) = jX$.

Der Realteil muss verschwinden!

2. $L_1 = \frac{X}{\omega_0}$
 L_1 ist rein reell - kann aber negativ sein!
3. $\frac{1}{Z_1} = \frac{2A}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{Z_2}$
Anschließend den Schwingkreis abspalten -z.B. mit Polynomdivision und Koeffizientenvergleich.
4. $L_2 = \frac{1}{2A}$
 L_2 ist reell und positiv!
5. $C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L^2}$
6. $L_3 = -\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
Entweder muss L_3 oder L_1 negativ sein!
7. $Z_3 = Z_2 - L_3 p$
8. Umwandlung der 3 Induktivitäten in einen festgekoppelten Übertrager

$$L_{11} = L_1 + L_2$$

$$L_{22} = L_2 + L_3$$

Im Idealfall ist Z_3 jetzt eine sehr einfache Impedanz. Da normalerweise eine Induktivität <0 ist gibt es im Buch eine Ersatzschaltung mit einem Übertrager. Ausserdem gibt es eine Kontrollformel für die Induktivitäten:

$$\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = 0$$

Jetzt kann eventuell wieder eine Widerstandsreduktion durchgeführt werden und dann erneut bei 1. begonnen werden.

1.5 Partialbruchnetzwerk nach Foster

Durch Partialbruchzerlegung einfache Aneinanderreihung der Elemente. Bei Impedanz Reihenschaltung der Impedanzen. Bei Admittanz Parallelschaltung der Admittanzen. Es ist kein Wechsel von zwischen Impedanz und Admittanz erlaubt!

Wird realisiert, indem man den Nenner faktorisiert und dann eine Partialbruchzerlegung durchführt. Schrittweise ist es einfacher, da ansonsten der Koeffizientenvergleich recht riesig wird. Folgende Partialbrüche sind erlaubt: $\frac{A}{p}$, $\frac{Bp}{p^2 + p^2}$, Cp

Cp wird durch Abspaltung eines Pols in ∞ erzeugt. Danach ist der Zähler wieder gradniedriger als der Nenner und es kann die Partialbruchzerlegung durchgeführt werden.

1.6 Partialbruchnetzwerk nach Cauer/Kettennetzwerk

Beständiger Polabbau in ∞ und nach jedem Abbau Wechsel von Impedanz zur Admittanz oder umgekehrt (eben so, dass man einen Pol in ∞ abspalten kann). Funktioniert nur bei RZP gut, da bei anderen Zweipolen nicht sichergestellt ist, ob die Restfunktion eine ZPF ist.

- $Z(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p}{b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$
- $Z_1(p) = Z(p) - z_1(p)$, wobei $z_1 = \frac{a_n}{b_{n-1}}$
- $\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} - z_2(p)$, wobei $z_2 = \frac{d_n}{c_{n-1}}$
- ...

2 Zweitore

2.1 Realisierung nach Abschnitt 3.8

- Entwicklungsstellen bestimmen
ES müssen nur einmal berechnet werden aber zur Realisierung müssen alle ES abgearbeitet werden. Bei ES $p_\nu = 0$ oder $p_\nu = \infty$ einfachen Polabbau an dieser Stelle zuerst durchführen.
- ES $p_\nu = \sigma_\nu$ oder $p_\nu = \sigma_\nu + j\omega_\nu$ oder $p_\nu = j\omega_\nu$ werden wie Brune-Zyklus abgearbeitet
- Realisierung ist i.A. nicht kanonisch!
- keine Widerstandsreduktion durchführen!

Abbau einer ES 1. Art

$$q(p) := \begin{cases} \frac{D}{p} & \text{fuer } p_\nu = 0 \\ \frac{Lp}{Lp} & \text{fuer } p_\nu = \infty \\ \frac{p}{p^2 - p_\nu^2} & \text{fuer } p_\nu \neq 0, \infty \end{cases} \quad D = \frac{1}{C}$$

$$Z_1(p) = Z(p) - q(p)$$

Abbau einer ES 2. Art

- $p_\nu = 0$
 $\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{Z(p)} - \frac{1}{L_{20}p}$
- $p_\nu = \infty$
 $\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{Z(p)} - C_{20}p$
- $p_\nu = \sigma_\nu$ oder $p_\nu = j\omega_\nu$
 $Z_1(p) = Z(p) - L_1p$, wobei $L_1 = \frac{Z(p_\nu)}{p_\nu}$
 $\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} - \frac{\frac{p}{L_2}}{p^2 - p_\nu^2}$
Faktorisierung des Nenners von $\frac{1}{Z_1(p)}$ durch Polynomdivision mit $p^2 - p_\nu^2$. Falls $\frac{1}{Z_1(p)}$ vom 1. Grad ist, kann man durch Hinzufügen und wieder Abziehen des konjugiert-komplexen (Phantomnullstelle) auf einfache Weise auf $Z_2(p)$ kommen.
- $p_\nu = \sigma_\nu + j\omega_\nu$
 $\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{Z_1(p)} - \frac{\frac{p}{L_2}}{p^2 - p_\nu^2} - \frac{\frac{p}{L_2^*}}{p^2 - p_\nu^{*2}}$ Quadrupel abspalten

$$Z_3(p) = Z_2(p) - L_3p - \frac{1}{C_3p}$$

Abbau einer ES 3. Art Wie Abbau 2. Art wenn $p_i = \sigma_i$, also reell. Ansonsten wirds lustig und das steht im Buch auf den Seiten 72f und 62f.

2.2 Matrix-Umwandlung

Verbindung zur Übertragungsfunktion $H(p) = \frac{E}{A+B+C+D}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{E}{C} \\ \frac{B}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$$

Umrechnung der Zweitormatrizen Z, Y, A

	Z			Y			A		
Z				$\frac{1}{\Delta Y}$	y_{22}	$-y_{12}$	$\frac{1}{a_{21}}$	a_{11}	ΔA
Y	$\frac{1}{\Delta Z}$	z_{22}	$-z_{12}$				$\frac{1}{a_{12}}$	a_{22}	$-\Delta A$
A	$\frac{1}{z_{21}}$	z_{11}	ΔZ	$\frac{1}{y_{21}}$	$-y_{22}$	-1			
		1	z_{22}		$-\Delta Y$	$-y_{11}$			

2.3 Realisierung der Kettenmatrix

Definition der Kettenmatrix:

$$A(p) = \frac{1}{E(p)} \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix}$$

$E(p)$ ist ein gerades oder ungerades Polynom.

$E(p)$ hat keine gemeinsamen Nullstellen mit A, B, C, D .

$E(p)$ enthält alle Pole von $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$.

$E(p)$ hat mindestens den höchsten Grad der Nenner.

2.3.1 Vorbereitungen für die Realisierbarkeit

- $\frac{A(p)}{E(p)}$ und $\frac{D(p)}{E(p)}$ müssen gerade Funktionen sein
 $\frac{B(p)}{E(p)}$ und $\frac{C(p)}{E(p)}$ müssen ungerade Funktionen sein
- Die Determinante der Matrix ist identisch 1. $AD - BC = E^2$
- Mindestens drei der vier folgenden Quotienten müssen Reaktanz-ZPF sein:
 $(\frac{A_{12}}{A_{11}}, \frac{A_{12}}{A_{22}}, \frac{A_{21}}{A_{11}}, \frac{A_{21}}{A_{22}})$.
oder:
Das Polynom $A + B + C + D$ muss ein Hurwitz-Polynom sein.
Beweis:
 $Z = \frac{A+D}{B+C}$ muss sich als Reaktanz realisieren lassen.
→ Abspalten von Polen in 0 oder ∞
→ Beim Faktorisieren darf sich nichts rauskürzen (Pole/NSt. auf Im-Achse!)

2.3.2 Realisierung der Kettenmatrix mit einem Abschlusswiderstand

1. $Z = \frac{A+B}{C+D}$ ist die Eingangsimpedanz - eventuell im Zähler und Nenner vorhandene Nullstellen werden zunächst gekürzt. Das können nur Nullstellen von $E(p) =$ Entwicklungsstellen sein!
2. Die Nullstellen von $E(p)$ sind auch gleichzeitig die Entwicklungsstellen für die Verwirklichung von $Z(p)$.
3. Die Impedanz wird nach Abschnitt 3.8 im Buch verwirklicht. Die Reihenfolge der Entwicklungsstellen ist dabei egal, dies ergibt unterschiedliche Lösungen. Immer zuerst ESt. 1. Grads nehmen, da dies die einfachste Realisierung ist und sich eine Gradreduktion von 1 oder 2 ergibt.
4. Wenn sich beim Abschluss ein Restwiderstand $Z_3 \neq 1$ ergibt, so muss man einen idealen Übertrager vor den Widerstand mit dem Wert "1" setzen. Übersetzungsverhältnis $U = \sqrt{Z_3}$.
5. Falls sich ein negativer Abschlusswiderstand ergibt, so muss man den Übertrager umpolen.

2.4 Realisierung von $H(p)$

$$H(p) = \frac{E}{A + B + C + D}$$

- $H(p)$ muss evtl. durch Erweiterung mit einem Hurwitz-Polynom so darstellbar sein, dass der Zähler von $H(p)$ ein gerades oder ungerades Polynom ist und der Nenner ein Hurwitz-Polynom.
- Bei der Erweiterung von $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ um $N(p)$ gerade bzw. ungerade zu machen dürfen die erzeugten Pol-/NSt.-Paare nicht auf der rechten Seite liegen, denn sonst ist der Nenner kein Hurwitz-Polynom mehr!
- Entwicklungsstellen sind die Nullstellen von $E(p)$. Falls wie oben erweitert wurde, so werden die erzeugten Entwicklungsstellen automatisch mit abgearbeitet durch eine Gradreduktion von 2 (4 bei Quadrupeln). Die Stelle ∞ ist Entwicklungsstelle, falls $\text{Grad}(E) < \text{Grad}(A + B + C + D)$ ist.
- Es gilt die Bedingung $H(j\omega)H(-j\omega) \leq \frac{1}{4}$
Falls ein konstanter Faktor k über obige Bedingung bestimmt werden soll, so lässt man ω einfach gegen 0 oder ∞ gehen und bestimmt daraus ein k , das für beide Fälle die Bedingung erfüllt.

2.4.1 mit 2 Widerständen

$$K(p)K(-p) = \frac{1}{H(p)H(-p)} - 4$$

- $H(p)$ einsetzen und in die Form $K(p)K(-p) = \frac{P_{oben}(p)P_{oben}(-p)}{P_{unten}(p)P_{unten}(-p)}$ bringen.
 $\rightarrow K(p) = \pm \frac{P_{oben}(p)}{P_{unten}(p)}$
- $K(p)$ bedeutet "irgendeine der charakteristischen Funktionen".
 $H(p)$ hat dort Nullstellen, wo $K(p)$ Pole hat.
 $H(j\omega)H(-j\omega) = \frac{1}{4}$ ist dort maximal, wo $K(j\omega) = 0$ ist.
- $Z(p) = \frac{\frac{1}{H(p)} + K(p)}{\frac{1}{H(p)} - K(p)}$ muss eine ZPF sein \Rightarrow Realisierung von $Z(p)$

2.4.2 mit 1 Abschluss-Widerstand

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = \frac{E}{A+B+C+D}, P_1 \text{ ist gerade oder ungerade, } P_2 \text{ ist ein Hurwitz-Polynom}$$

- Stromerregung $H_1(p) = \frac{Z_{12}(p)}{1+Z_{22}(p)}$

$$- P_1(p) \text{ ist gerade} \rightarrow Z_{12} = \frac{P_1(p)}{P_{2u}(p)}, Z_{22} = \frac{P_{2g}(p)}{P_{2u}(p)}$$

$$- P_1(p) \text{ ist ungerade} \rightarrow Z_{12} = \frac{P_1(p)}{P_{2g}(p)}, Z_{22} = \frac{P_{2u}(p)}{P_{2g}(p)}$$

$$Z_{11}(p) = \frac{A_0}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{2A_\nu p}{p^2 + \omega_\nu^2} + A_\infty p$$

$$Z_{22}(p) = \frac{B_0}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{2B_\nu p}{p^2 + \omega_\nu^2} + B_\infty p$$

$$Z_{12}(p) = \frac{C_0}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{2C_\nu p}{p^2 + \omega_\nu^2} + C_\infty p$$

Aus der Bedingung der positiv semidefiniten Form folgt: $\omega_\nu, A_\nu, B_\nu \geq 0$. Z_{11} wird dadurch bestimmt, dass man Z_{11} nur die Pole zuordnet, die in der Funktion Z_{12} vorkommen (S.123). Um jetzt Z_{11} auszurechnen in folgende Formel die Koeffizienten einsetzen:

$$A_\nu = \frac{C_\nu^2}{B_\nu}$$

Eingangsimpedanz: (Pole von Z_{11} kürzen sich oft raus)

$$Z(p) = Z_{11}(p) - \frac{Z_{12}^2(p)}{1 + Z_{22}(p)}$$

- Spannungserregung $H_2(p) = \frac{Y_{12}(p)}{1 + Y_{22}(p)}$
Eingangsadmittanz

$$Y(p) = Y_{11}(p) - \frac{Y_{12}^2(p)}{1 + Y_{22}(p)}$$

3 Einheitselemente

Zwischen 2 Elementarzeitoren muss meist ein Einheitselement in Kaskadenlage liegen (Aufgabestellung beachten). Dazu muss immer die 1 zwischendurch wegentwickelt werden (Richards-Zyklus). Geerdete Einheitselemente müssen als Admittanz realisiert werden - aber danach muss wieder zur Impedanz übergegangen werden.

Entwicklungsstellen sind die Nullstellen von $E(\lambda)$ auf der imaginären positiven Achse und l -mal die "1" von $\sqrt{1 - \lambda^2}^l$. Beachte: Die Wurzel hat l ES bei $H(\lambda)$, nicht bei der ZPF $Z(\lambda)$! Wenn der Grad vom Nenner grösser ist als der vom Zähler, dann ist auch ∞ eine ES.

- leerlaufendes EH - entspricht parallelgeschalteter Kapazität
 $Z_i(\lambda) = \frac{1}{Y_0 \lambda}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

- kurzgeschlossenes EH - entspricht parallelgeschalteter Induktivität
 $Z_i(\lambda) = Z_0 \lambda$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{L\lambda} & 1 \end{bmatrix}$$

- mit Z_L abgeschlossenes EH - Richards-Element
 $Z_i(\lambda) = \frac{Z_0 \lambda + Z_L(\lambda)}{Y_0 \lambda Z_L(\lambda) + 1}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \lambda \\ Y_0 \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

- Idealer Übertrager (hier mit "u" statt "ü")

$$A = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & \frac{1}{u} \end{bmatrix}$$

3.1 Richards-Zyklus

1. Wähle $Z_i(1) = Z_{0,(i+1)} \rightarrow$ Die "1" in Z_i einsetzen
 $Z_i(1)$ ist der Wert des Einheitselements
2. $Z_{L,(i+1)} = \frac{Z_i(\lambda) - Z_i(1)\lambda}{1 - Y_i(1)\lambda Z_i(\lambda)}$
3. Wenn λ eine ES 2. Art ist, so kürzt sich die Nullstelle raus. \rightarrow Gradminderung von $Z_{L,(i+1)}$ um 1 im Vergleich zu Z_i .

3.2 Realisierung der Impedanz

- Bestimmung der Entwicklungsstellen (wie immer ...)
- Überprüfen, welche Entwicklungsstellen eine eventuell geforderete Struktur erfüllen - eventuell zur Admittanz übergehen. Normalerweise werden Kapazitäten und Induktivitäten als Admittanzen ermittelt, da diese meist geerdet sein sollen.
- Realisierung von ES 1. und 2. Art über das Abspalten von Polen wie bei RZT
- Einfügen von Einheitslementen in Kaskaden-Lage über Richards-Zyklus

3.3 Realisierung der Übertragungsfunktion zwischen 2 Widerständen

1. $E(\lambda) = \lambda^k \prod_{\nu=1}^r (\lambda^2 + y_\nu^2)$

$$H(\lambda) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^{2l}} E(\lambda)}{A(\lambda) + B(\lambda) + C(\lambda) + D(\lambda)}$$

$A + B + C + D = N$ muss ein Hurwitz-Polynom

$l \geq 0$

$E(\lambda)$ erfüllt die oben angegebene Gleichung

2. $W(\lambda) = \frac{1}{H(\lambda)}$

$$K(\lambda)K(-\lambda) = W(\lambda)W(-\lambda) - 4$$

3. $K(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{\sqrt{1 - \lambda^{2l}} E(\lambda)}$

Durch Abschätzen bekommt man mögliche Lösungen für $K(\lambda)$ heraus.

4. Aufstellen der Eingangsimpedanz

$$Z(\lambda) = \frac{W(\lambda) + K(\lambda)}{W(\lambda) - K(\lambda)}$$

Die Eingangsimpedanz hängt von der Wahl der charakteristischen Funktion $K(\lambda)$ ab.

5. Abspalten von Entwicklungsstellen nach Abschnitt 3.8. Als ES kommen nur Werte auf der positiven IM-Achse in Frage. Bei Klausuren normalerweise nur die Werte 0, 1, ∞ . Die "1" ist eine l -fache Entwicklungsstelle und wird mit l Richards-Elementen realisiert.
6. Ein idealer Übertrager bringt den Abschlusswiderstand auf den geforderten Wert (normalerweise "1").
7. Falls erforderlich den Ausgang umpolen.
8. Probe durch Aufstellen der Kettenmatrizen A und Ausmultiplizieren. Die Übertragungsfunktion $H(\lambda) = \frac{E}{A+B+C+D}$ mit $A = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ muss dabei der Ausgangsübertragungsfunktion entsprechen. Eventuell muss man manche Kettenmatrix-Elemente noch vorher erweitern, um $\frac{1}{E}$ ausklammern zu können.

4 Allgemeines

4.1 Gerader und ungerader Teil

$$Z(j\omega) = G(j\omega) + U(j\omega) = \operatorname{Re} Z(j\omega) + j \operatorname{Im} Z(j\omega)$$

Gerader Teil

$$G(p) = \frac{1}{2} [Z(p) + Z(-p)]$$

$$G(p) = \frac{G_Z G_N - U_Z U_N}{G_N^2 - U_N^2}$$

Ungerader Teil

$$U(p) = \frac{1}{2} [Z(p) - Z(-p)]$$

$$U(p) = \frac{U_Z G_N - U_N G_Z}{G_N^2 - U_N^2}$$

4.2 Entwicklungsstellen (Realisierung nach 3.8)

allgemeine Vorbedingung: Entwicklungsstellen müssen im oder am Rand des 1. Quadranten liegen. ES müssen entsprechend ihrer Vielfachheit abgearbeitet werden.

	1.Art	2.Art	3.Art
Lage	auf der IM-Achse	im gesamten 1. Quadranten	alle Punkte ohne 0
Gradreduktion	1 oder 2	1,2 oder 4	-
Bedingungen	Pol von $Z(p)$	NSt. von $G(p)$	-

4.3 Abspalten für Dummis

Abspalten eines Pols in 0

$$Z(p) = \frac{a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0}{b_n p^n + \dots + b_1 p} = \frac{a_0}{b_1 p} + \frac{a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0 - \frac{a_0}{b_1 p} (b_n p^n + \dots + b_1 p)}{b_n p^n + \dots + b_1 p}$$

Abspalten eines Pols in ∞

$$Z(p) = \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p}{b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_n}{b_{n-1}} p + \frac{a_n p^n + \dots + a_1 p - \frac{a_n}{b_{n-1}} p (b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0)}{b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0}$$

4.4 Horner-Schema

$$\left| \begin{array}{l} Z_5(p) \\ + a_\mu + b_{\mu-1} p_\nu \\ Z_4(p) \\ + b_\mu + c_{\mu-1} p_\xi \\ Z_3(p) \end{array} \right. \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ p_\nu b_0 & p_\nu b_1 & p_\nu b_2 & p_\nu b_3 & p_\nu b_4 & p_\nu b_5 \\ b_0^\nearrow & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & - \\ p_\xi c_0 & p_\xi c_1 & p_\xi c_2 & p_\xi c_3 & p_\xi c_4 & - \\ c_0^\nearrow & c_1 & c_2 & c_3 & - & - \end{array} \right|$$

Falls das Horner-Schema nach mehrmaliger Abspaltung nicht mehr aufgeht, so ist die betreffende Entwicklungsstelle keine Nullstelle des Polynoms mehr! Dann muss mit einer anderen Nullstelle weitergemacht werden.

4.5 Aufspalten eines geraden Polynoms 4. Grades

$$a_4p^4 + a_2p^2 + a_0 = (b_2p^2 + b_1p + b_0)(b_2p^2 - b_1p + b_0)$$

- $b_2 = \sqrt{a_4}$ oder $a_4 = b_2^2$
- $b_0 = \sqrt{a_0}$ oder $a_0 = b_0^2$
- $b_1 = \sqrt{2b_2b_0 - a_2}$ oder $a_2 = 2b_2b_0 - b_1^2$