# Mathematik Formeln

**3. und 4. Semester**

**von Gerald Meier**

# 1 Kurven

## *1.1 Vektoren*

### 1.1.1 Tangentenvektor $\vec{t}$

$$\vec{t} = \vec{x}'(s) = \dot{\vec{x}}(t) \cdot \frac{1}{\left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\|}$$

### 1.1.2 Krümmungsvektor $\vec{t}'$

$$\vec{t}' = \dot{\vec{t}} \cdot \frac{1}{\left\|\dot{\vec{x}}(t)\right\|} = \kappa \cdot \vec{n} \qquad \kappa = \left\|\vec{t}'\right\|\text{: Krümmung} \qquad \rho = \frac{1}{|\kappa|}\text{: Krümmungsradius}$$

**Parameterdarstellung:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\qquad \kappa = \dfrac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$

**explizite Darstellung:** $y = f(x)$ $\qquad \kappa = \dfrac{f''}{\left(1 + f'^2\right)^{3/2}}$

**Polardarstellung:** $r = r(\varphi)$ $\qquad \kappa = \dfrac{r^2 + 2r'^2 - rr'}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$

### 1.1.3 (Haupt-) Normalenvektor $\vec{n}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{t} = \frac{\vec{t}'}{\left\|\vec{t}'\right\|} = \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{t}'$$

### 1.1.4 Binormalenvektor $\vec{b}$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \qquad \tau = \left\langle \vec{n}', \vec{b} \right\rangle\text{: Torsion}$$

## *1.2 Anwendungen*

### 1.2.1 Evolute, Evolvente und Schmiegekreis

Evolute: Lage der Krümmungsmittelpunkte

Evolute: $\vec{m}(t) = \vec{x}(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)}\vec{n}(t)$ $\qquad$ Evolvente: $\vec{w}(t) = \vec{x}(t) - \left(s(t) + \alpha\right)\vec{t}(t)$

Schmiegekreis: Mittelpunkt $\vec{m} = \vec{x} + \dfrac{1}{\kappa}\vec{n}$ Radius $\rho$

### 1.2.2 Bogenlängenparameter

$$\dot{s}(t) = \left|\dot{x}(t)\right| > 0 \qquad s(t) = \int_{-\infty}^{t} \left|\vec{x}(\tau)\right| d\tau \qquad \text{Bogenlänge: } L = \int_{\alpha}^{\beta} \left\|\dot{\vec{x}}\right\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \ldots}\, d\tau$$

**explizite Darstellung:** $y = f(x)$ $\qquad L = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'^2}\, dx$

**Polardarstellung:** $r = r(\varphi)$ $\quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$

**Parametertransformation** $\quad ' = \frac{d}{ds} \quad \|\vec{x}'\| = 1 \quad \frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\dot{\vec{x}}\|}\frac{d}{dt}$

### 1.2.3 FRENET'sche Ableitungsformeln

$$\vec{t}' = \kappa \cdot \vec{n}$$
$$\vec{n}' = -\kappa \cdot \vec{t} + \tau \cdot \vec{b}$$
$$\vec{b}' = -\tau \cdot \vec{n}$$

# 2 Reellwertige Funktionen mehrerer Variabler

## *2.1 partielle Ableitung*

### 2.1.1 Ansätze zum Stetigkeitsbeweis

$x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = x_n^{\;2} = \frac{1}{n^2} \quad x_t = t \cdot \cos\varphi \quad y_t = t \cdot \sin\varphi$

### 2.1.2 Bezeichnung

kompakt $\Leftrightarrow$ abgeschlossen und beschränkt (HEINE-BOREL)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $D^0$ | Inneres von D | offen | $D^0 = D$ |
| $\partial D$ | Rand von D | abgeschlossen | $\partial D \subset D$ |
| | | dünn | $\partial D = D$ |

### 2.1.3 partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left( f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + t \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{ f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)\right\}$$

existieren die partiellen Ableitungen von f und sind beschränkt $\Rightarrow$ f ist stetig

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = g\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(f(\vec{x})) = \frac{\partial \varphi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

### 2.1.4 Gradient von f

$$f' = \text{grad } f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$$

### 2.1.5 Satz von SCHWARZ

$f: D \to R \qquad D \subseteq R^n$ offen $\qquad f \in C^1$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

### 2.1.6 Lineare Approximation

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}_{\to\ \text{Gleichung für Tangentialebene}} + o\left(\left|\vec{x}-\vec{x}_0\right|\right)$$

absoluter Fehler $F(x, y, \ldots)$

$$|\Delta F| = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y| + \ldots$$

## *2.2 Ableitungen*

### 2.2.1 Richtungsableitung in Richtung $\vec{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(\vec{x}+t\cdot\vec{a}) - f(\vec{x})\right) = \frac{\operatorname{grad} f\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{a}} = \vec{a}\cdot\vec{\nabla}$$

### 2.2.2 Wegableitung entlang $\vec{x}(t)$

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \operatorname{grad} f\cdot\dot{\vec{x}}$$

### 2.2.3 vollständiges Differential

$$df = \operatorname{grad} f\cdot\Delta\vec{x}$$

## *2.3 Mittelwertsatz und TAYLOR-Formel*

### 2.3.1 Mittelwertsatz

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + (\vec{h}\cdot\vec{\nabla}) f(\vec{x}+\theta\vec{h}) \qquad \text{mit } 0<\theta<1$$

Folgerung: $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g \Rightarrow f = g$

### 2.3.2 TAYLOR-Formel

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(\vec{h}\cdot\vec{\nabla})^k f(\vec{x}) + R_n \qquad \text{mit } R_n = \frac{1}{(n+1)!}(\vec{h}\cdot\vec{\nabla})^{n+1} f(\vec{x}+\theta\vec{h}) \qquad \text{mit } 0<\theta<1$$

im $R^2$:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & f(x,y) + f_x(x+\theta h, y+\theta k)\cdot h + f_y(x+\theta h, y+\theta k)\cdot k \\ & + \tfrac{1}{2} f_{xx}(x+\theta h, y+\theta k)\cdot h^2 + f_{xy}(x+\theta h, y+\theta k)\cdot h\cdot k + \tfrac{1}{2} f_{yy}(x+\theta h, y+\theta k)\cdot k^2 + \ldots \end{aligned}$$

## *2.4 Extremwertaufgaben*

### 2.4.1 Hesse-Matrix

$$H_f(\vec{x}) := \left(f_{x_i x_j}(\vec{x})\right) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\vec{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

### 2.4.2 Maxima und Minima

Extrema bei kritischen Punkten ($f_x$=0 und $f_y$=0)

H positiv definit $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $\vec{x}_0$
H negativ definit $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $\vec{x}_0$
H indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $\vec{x}_0$

$H=H^T$ $\lambda_i$ Eigenwerte von H
H ist positiv definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i > 0$
H ist negativ definit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i < 0$
H ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \geq 0$
H ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle $\lambda_i \leq 0$
H ist indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ ein $\lambda_i > 0$ und ein $\lambda_k < 0$

$$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2$$

| $\Delta > 0$ | | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|---|
| $f_{xx} > 0$ Minimum | $f_{xx} < 0$ Maximum | Sattelpunkt | keine Aussage |

### 2.4.3 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung

Gesucht: $f(\vec{x}_0) = \text{Extr}!$ $g(\vec{x}_0) = 0$

**Methode 1: explizite Methode**

Auflösen von $g(\vec{x}_0) = 0$ nach einer Variable $\Rightarrow$ $x_n = h(x_1, \ldots, x_{n-1})$

Elimination von $x_n$ aus f durch Einsetzen $\Rightarrow$ $f = (x_1, \ldots, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \text{Extr}!$

**Methode 2: Parametrisierung der Nebenbedingung**

Bestimmen der Parameterdarstellung der Kurve $\Rightarrow$ $x_1(t), \ldots, x_n(t)$

Lösen des gewöhnlichen Extremalproblems $\Rightarrow$ $F(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \text{Extr}!$

**Methode 3: LAGRANGE-Multiplikatorregel**

$\exists$ $\lambda$: $\text{grad} f(\vec{x}_0) = \lambda \text{grad} g(\vec{x}_0)$ $\Leftrightarrow$ $\text{grad}(f - \lambda g) = 0$ $\lambda$: LAGRANGE-Multiplikator

$\Rightarrow$ Suche kritischer Punkte von $F = f - \lambda g$ $\rightarrow$ Zusammenhang zwischen x und y

$\rightarrow$ in Nebenbedingung einsetzen $\rightarrow$ $\vec{x}_0$

Bei zwei Nebenbedingungen $g(\vec{x}_0) = 0$ und $h(\vec{x}_0) = 0$

$$\text{grad}(f - \lambda g - \mu h) = 0$$

# 3 Vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher - Vektorfelder

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

## 3.1 Ableitungen

### 3.1.1 partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Koordinatentransformation

$$x, y \to u(x,y), v(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{x}$$

### 3.1.3 JACOBI-Matrix und JACOBI-Determinante

**JACOBI-/Funktionalmatrix**

$$J := \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1^T \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad J_{f^{-1}} = J_f^{-1}$$

**JACOBI-/Funktionaldeterminante**

$$\det J = \det \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

Umkehrbarkeitsbedingung $\det J \neq 0$

### 3.1.4 Richtungsableitung in Richtung $\vec{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(\vec{x} + t \cdot \vec{a}) - f(\vec{x})\right) = \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{a})\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \vec{a}$$

### 3.1.5 implizites Differenzieren

$$f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f + \partial_n f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial_i f}{\partial_n f}$$
$$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

## 3.2 Rechenregeln

### 3.2.1 Allgemein

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

### 3.2.2 Kettenregel

$$h(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) \qquad h' = \left(\frac{\partial h}{\partial \vec{x}}\right) = f'(g(\vec{x})) \cdot g'(x)$$

$$\begin{matrix} R^n & \xrightarrow{g} & R^m & \xrightarrow{f} & R^l \\ x_i & & y_k & & z_r \end{matrix} \qquad \frac{\partial(z_1, \dots, z_l)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \dots, z_l)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} \cdot \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

**Spezialfall: Wegableitung**

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots)}{\partial(x_1, x_2, \ldots)} \cdot \dot{\vec{x}}$$

**Anwendung: Koordinatenwechsel**

$$\underbrace{\begin{matrix} R^m & \underset{p^{-1}}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & R^n \\ x_i & & u_i \end{matrix}}_{\text{Koordinatenwechsel}} \begin{matrix} \xrightarrow{f} & R^m \\ & t_i \end{matrix} \qquad \frac{\partial(f_i)}{\partial(x_l)} = \frac{\partial(f_i)}{\partial(u_k)} \cdot \left(\frac{\partial(x_l)}{\partial(u_k)}\right)^{-1} \qquad \Rightarrow (p')^{-1} = \left(\frac{\partial(x_l)}{\partial(u_k)}\right)^{-1}$$

# 4 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## *4.1 Differentialgleichung 1. Ordnung*

### 4.1.1 Separable Differentialgleichung

$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$ Lösung: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$

AWP: $y(x_0) = y_0 \qquad \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$

### 4.1.2 Homogene Differentialgleichung

$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$ Ansatz: $y(x) = x \cdot u(x) \Rightarrow$ Separabler Typ

### 4.1.3 Typ $y' = f(ax + by + c)$

$\boxed{y' = f(ax + by + c)}$ Ansatz: $u(x) = ax + by + c \Rightarrow$ Separabler Typ

### 4.1.4 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ AWP: $y(x_0) = y_0 \Rightarrow y(x) = e^{H(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-H(t)}dt\right)$

mit $H(x) = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt$

bzw. $y_h = k \cdot e^{-\int p dx}$ und $y_p = e^{-\int p dx} \cdot \int q \cdot e^{\int p dx} dx$

### 4.1.5 BERNOULLI-Differentialgleichung

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}}$ Ansatz: $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$

### 4.1.6 RICCATI-Differentialgleichung

$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)}$ Ansatz: $y = \hat{y} + u(x)$ $\quad \hat{y}$ ist partikuläre Lösung

$\Rightarrow z' - [p - 2q\hat{y}]z = -q \qquad y = \hat{y} + \frac{1}{z}$

## 4.2 Vollständige Differentialgleichung

$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad x' = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$

D[ifferential]-Form der DGL: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Niveaulinien: $F(x,y) = C$

DGL der Niveaulinien: $F_x + F_y y' = 0$ oder $F_x x' + F_y = 0 \Rightarrow$ D-Form: $F_x dx + F_y dy = 0$

$Pdx + Qdy = 0$ vollständig: es gibt ein F mit $P = F_x \quad Q = F_y$

$\Rightarrow$ Lösung der DGL ist gegeben durch $F(x,y) = C$

$Pdx + Qdy = 0$ vollständig $\Leftrightarrow P_y = Q_x$

$Pdx + Qdy = 0$ nicht vollständig $\Rightarrow MPdx + MQdy = 0$ vollständig (M: EULER-Multiplikator)

## 4.3 PICARD-Iteration

$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \Rightarrow$ Integralgleichung: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$

$\Rightarrow$ PICARD-Iteration: $y_0(x) \equiv y_0 \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))dx$

## 4.4 DGL-Systeme erster Ordnung

### 4.4.1 Fundamentalsystem

Ein Satz von n linear unabhängigen Lösungen $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ der Differentialgleichung $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ heißt Fundamentalsystem.

### 4.4.2 WRONSKI-Matrix und WRONSKI-Determinante

WRONSKI-Matrix: $W(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$

WRONSKI-Determinante: $\det W(t)$

$$(\det W)^{\cdot} = (\det W) \cdot \mathrm{Spur}(A(t)) \Rightarrow \det W = c \cdot e^{\int \mathrm{Spur}(A(t))dt}$$
$$W' = AW$$

### 4.4.3 DGL-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

#### *4.4.3.1 Fundamentalsystem*

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ Existieren n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{c}_i$ von A mit $A\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i$ so bilden die $\vec{x}_i = e^{\lambda_i t}\vec{c}_i$ ein Fundamentalsystem

#### *4.4.3.2 Hauptvektoren.*

Hauptvektor k-ter Stufe: $A_\lambda{}^k \vec{c} = \vec{0}$ und $A_\lambda{}^{k-1}\vec{c} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x} = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!} A_\lambda{}^m \vec{c} t^m$ ist Lösung von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

Bestimmung der Hauptvektoren k-ter Stufe $\vec{l}_r, \ldots, \vec{l}_s$ erfolgt über das erweiterte Gleichungssystem mit den bereits bestimmten Hauptvektoren k-1-ter Stufe $\vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_{r-1}$

$$\begin{pmatrix} A_\lambda{}^k \\ \hline \vec{l}_1{}^T \\ \vdots \\ \vec{l}_{r-1}{}^T \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

#### *4.4.3.3 Inhomogenes DGL-System erster Ordnung*

$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$ Fundamentalmatrix des homogenen Problems gegeben $\Rightarrow$ Variation der Konstanten

$\Rightarrow \vec{x} = W(t)\left(\int W^{-1}\vec{b}\,dt + \vec{k}\right)$

## *4.5 DGL n-ter Ordnung*

### 4.5.1 Reduktion der Ordnung

A) $F\left(x, y^{(r)}, y^{(r+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ Ansatz: $y^{(r)}(x) = z(x)$

$\Rightarrow F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-r)}\right) = 0$

B) $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ Ansatz: $y' = u(y)$ $\quad y'' = u \cdot u'$

$\Rightarrow$ DGL (n-1)-ter Ordnung für u

C) $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot y = 0$ mit Lösung $y_1(x) \neq 0$

Ansatz: $y = y_1 \cdot u(x)$

$\Rightarrow$ DGL $u^{(n)} + b_{n-1} \cdot u^{(n-1)} + \ldots + b_1 \cdot u' = 0$

Ansatz: $u' = z$ (vgl. A)

### 4.5.2 homogene EULER-DGL

EULER-Differentialoperator: $E = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k D^k$

homogene EULER-DGL: $Ey = 0$

Ansatz: $x = e^t \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt} \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\dot{y} \Rightarrow y'' = \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)y \Rightarrow \ldots.$

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ ..... $\Rightarrow$ charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = a_n\left(\lambda - \lambda_1\right)^{k_1}\left(\lambda - \lambda_2\right)^{k_2} \ldots$

$\Rightarrow$ im komplexen Fall: Lösungen: $x^{\lambda_i}, \ln x \cdot x^{\lambda_i}, \ln^2 x \cdot x^{\lambda_i}, \ldots, \ln^{(k_i-1)} x \cdot x^{\lambda_i}$

$\Rightarrow$ im reellen Fall: Lösungen für $\lambda_m = \alpha_m \pm i\beta_m$

$$x^{\alpha_m}\cos\left(\ln\beta_m x\right), \ln x \cdot x^{\alpha_m}\cos\left(\ln\beta_m x\right), \ldots, \ln^{(k_m-1)} x \cdot x^{\alpha_m}\cos\left(\ln\beta_m x\right)$$

$$x^{\alpha_m}\sin\left(\ln\beta_m x\right), \ln x \cdot x^{\alpha_m}\sin\left(\ln\beta_m x\right), \ldots, \ln^{(k_m-1)} x \cdot x^{\alpha_m}\sin\left(\ln\beta_m x\right)$$

### 4.5.3 Spezielle Ansätze

#### *4.5.3.1 bei inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten*

| **Inhomogenität** | **Ansatz** | **Resonanz k-fach** |
|---|---|---|
| $a \cdot e^{\lambda x}$ | $A \cdot e^{\lambda x}$ | λ k-fache NS von P(λ) |
| $Q_m(x) \cdot e^{\lambda x}$ | $S_m(x) \cdot e^{\lambda x}$ | λ k-fache NS von P(λ) |
| $Q_m(x)$ | $S_m(x)$ | 0 k-fache NS von P(λ) |
| $e^{\alpha x} \cdot (a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x)$ | $e^{\alpha x} \cdot (A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x)$ | α±iβ k-fache NS von P(λ) |
| $a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x$ | $A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x$ | ±iβ k-fache NS von P(λ) |
| $e^{\alpha x} \cdot \left(Q_m(x) \cdot \cos\beta x + \tilde{Q}_m \cdot \sin\beta x\right)$ | $e^{\alpha x} \cdot \left(S_m(x) \cdot \cos\beta x + \tilde{S}_m \cdot \sin\beta x\right)$ | α±iβ k-fache NS von P(λ) |

bei k-facher Resonanz muß der Ansatz mit $x^k$ multipliziert werden.

#### *4.5.3.2 bei EULER-DGL*

Inhomogenität: $f(x) = x^{\mu} \cdot Q_m(\ln x)$

μ keine Nullstelle von P(λ) $\Rightarrow$ Ansatz: $y = S_m(\ln x) \cdot x^{\mu}$

μ k-fache Nullstelle von P(λ) $\Rightarrow$ Ansatz: $y = (\ln x)^k \cdot S_m(\ln x) \cdot x^{\mu}$

### 4.5.4 Potenzreihenansätze

Anfangswertproblem: $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$

ist f in der Nähe von $(x_0,y_0)$ in eine Potenzreihe $f(x,y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k$ entwickelbar, so ist auch die Lösung y in der Nähe von $x_0$ in einer Reihe $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ entwickelbar.

1) Lösung durch Differentiation: $c_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$

2) Einsetzen der Reihe für y in die Reihe für f(x,y) → Bestimmung der $c_k$ durch Koeffizientenvergleich

# 5 FOURIER-Reihen

## 5.1 Definition

FOURIER-Reihe: $f \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \sin(n\omega x)\right)$

FOURIER-Koeffizienten: $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \cos(n\omega x)dx$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cdot \sin(n\omega x)dx$

## 5.2 Sonderfälle

Ist f eine **gerade Funktion** (f(-x)=f(x)) ⇒ $b_n = 0;\ a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f \cdot \cos(n\omega x)dx$

Ist f eine **ungerade Funktion** (f(-x)=-f(x)) ⇒ $a_n = 0;\ b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f \cdot \sin(n\omega x)dx$

## 5.3 Bessel-Ungleichung

BESSEL-Ungleichung: $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k{}^2 + b_k{}^2\right) \le \frac{2}{T}\int_0^T f^2 dx$

## 5.4 Anwendungen

### 5.4.1 eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

#### 5.4.1.1 homogene DGL und Randbedingungen

1)

Differentialgleichung: $U_t = a \cdot U_{xx}$

Randbedingung: $U_x(0,t) = U_x(\pi,t) = 0$

Anfangsbedingung: $U(x,0) = f(x)$

Lösung: $U(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\tau)d\tau + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2t}\left(\int_0^{\pi} f(\tau)\cos(n\tau)d\tau\right)\cos(nx)$

2)

Differentialgleichung: $U_t = a \cdot U_{xx}$

Randbedingung: $U(0,t) = U(\pi,t) = 0$

Anfangsbedingung: $U(x,0) = f(x)$

Lösung: $$U(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-an^2t}\left(\int_0^{\pi} f(\tau)\sin(n\tau)d\tau\right)\sin(nx)$$

#### 5.4.1.2 inhomogene DGL

Differentialgleichung: $U_t = a \cdot U_{xx} + g(t,x)$

Randbedingung: $U(0,t) = U(\pi,t) = 0$

Anfangsbedingung: $U(x,0) = f(x)$

Lösung: $\rightarrow$ MEYBERG, VACHENAUER: „Höhere Mathematik 2“ S.385

#### 5.4.1.3 inhomogene DGL und Randbedingung

Differentialgleichung: $U_t = a \cdot U_{xx} + g(t,x)$

Randbedingung: $U(0,t) = \alpha(t)$ $\quad U(\pi,t) = \beta(t)$

Anfangsbedingung: $U(x,0) = f(x)$

Lösung:

## 5.5 LEIBNIZ-Regel (verallgemeinert)

$$\frac{d}{dy}\left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right] = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx + f(b(y),y)\cdot b' - f(a(y),y)\cdot a'$$

# 6 Integration im $R^n$

## 6.1 Bereichsintegrale

Transformationsgesetz für Bereichsintegrale

$$\int_D \rho(\vec{x})dD = \int_{D^*} \rho(\vec{x}(\vec{u}))\underbrace{\left|\det\frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,\ldots,u_n)}\right|}_{\Delta}dD^*$$

$\Delta$: Funktional- / JACOBI-Determinante

## 6.2 Flächenintegrale im $R^3$

### 6.2.1 Darstellungen

#### 6.2.1.1 Darstellung als Äquipotentialfläche

$$F = \{\vec{x} | f(\vec{x}) = c\} \qquad \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\|\text{grad} f\|}\text{grad} f$$

#### 6.2.1.2 kartesische / explizite Darstellung

$$F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = z(x,y)\right\} \quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}}$$

#### 6.2.1.3 Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v) \qquad \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$$

### 6.2.2 GAUSS-Fundamentalgrößen

$E = \vec{x}_u^{\,2} \qquad F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v \qquad G = \vec{x}_v^{\,2}$

$\rightarrow \left\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\| = \sqrt{EG - F^2}$

### 6.2.3 Flächeninhalt

#### *6.2.3.1 explizite Darstellung*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| z = z(x, y) \right\} \qquad I(F) = \int_B \sqrt{1 + z_x^{\,2} + z_y^{\,2}}\, dB$$

#### *6.2.3.2 Parameterdarstellung*

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \qquad I(F) = \int_D \left\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\| dD = \int_D \sqrt{EG - F^2}\, dD$$

### 6.2.4 Oberflächenintegral

$$\int_F \rho\, dF = \int_D \rho(\vec{x}(u, v)) \left\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\| dD$$

Flächenelement: $dF = \left\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \right\| du dv$

## *6.3 Kurvenintegral*

$$\int_C \rho\, ds = \int_{[a,b]} \rho(\vec{x}(t)) \left\| \dot{\vec{x}} \right\| dt$$

Bogenlängenelement: $ds = \left\| \dot{\vec{x}} \right\| dt$