Mathematik Formeln

1. und 2. Semester

von Gerald Meier

1 Grundlagen

1.1 Abbildungen

1.1.1 Surjektive Abbildungen $f(X) = Y$

$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$

1.1.2 Injektive Abbildungen

$x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Jedes Bild $y \in f(X)$ hat genau ein Urbild $x \in X$.

1.1.3 Bijektive Abbildungen

Die Abbildung ist surjektiv und injektiv.

1.2 Polynome

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^1 &= a-b \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\
(a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \\
(a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5
\end{aligned}
$$

2 Komplexe Zahlen

2.1 Betrag

$$\underline{Z} := \frac{a+jb}{c+jd} \Rightarrow |\underline{Z}| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

2.2 EULER'sche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{j\varphi}\right)$$

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2j}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) = \mathrm{Im}\left(e^{j\varphi}\right)$$

2.3 Argument

$$\underline{Z} := a + jb \Rightarrow \arg(Z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0,\ b \neq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \Pi & \text{für } a < 0,\ b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \Pi & \text{für } a < 0,\ b < 0 \end{cases}$$

$$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{N}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{N})$$

2.4 Wurzeln

$$\underline{Z} = z \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \sqrt[n]{\underline{Z}} = \sqrt[n]{z} \cdot e^{j\frac{\varphi + 2k\Pi}{n}}, k = 0, \ldots, n-1$$

3 Vektoren

3.1 Produkte von Vektoren

3.1.1 Das Standard Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\alpha$$

3.1.2 Das Vektorprodukt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| := \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\alpha$$

3.1.3 Das Tensorprodukt

$$\vec{x} \otimes \vec{y} := \vec{x} \cdot \vec{y}^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 & \cdots & x_1 \cdot y_n \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 & \cdots & x_2 \cdot y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m \cdot y_1 & x_m \cdot y_2 & \cdots & x_m \cdot y_n \end{pmatrix}$$

3.2 SCHMIDT'sches Orthonormalisierungsverfahren

$$\vec{w}_1 := \vec{u}_1$$

$$\vec{w}_k := \vec{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{u}_k, \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j, \qquad k = 2,3,\ldots,n$$

$$\vec{v}_j := \frac{\vec{w}_j}{\|\vec{w}_j\|}, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

3.3 HESSE'sche Normalform

Eine Ebene sei gegeben in der Form der allgemeinen Ebenengleichung

$$ax+by+cz=d$$

Der Vektor $\vec{n}:=(a,b,c)^T$ heiße der Normalenvektor (er steht senkrecht auf der Ebene). Der Normaleneinheitsvektor (Einheitsnormale) wird berechnet durch

$$\vec{n}_0:=\frac{\pm\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$$

Damit kommt man zur HESSE'schen Normalform

$$\left\langle \vec{x},\vec{n}_0 \right\rangle = d\left(\vec{0},\vec{E}\right)$$

4 Matrizen

4.1 Matrix-Multiplikation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

4.2 Rang

Der Rang der Matrix A rg A ist die Dimension des von den Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) aufgespannten Unterraums. A und A^T haben den gleichen Rang: rg A = rg A^T.

4.3 Determinanten

4.3.1 Determinante zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.3.2 Determinante dritter Ordnung (Regel von SARRUS)

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

4.3.3 Determinante n-ter Ordnung (Entwicklungssatz von LAPLACE)

z.B. Entwicklung nach der 3-ten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{34} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Die Vorzeichen ergeben sich gemäß des Tableaus.

$$\begin{matrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

4.3.4 Elementare Umformungen

Elementare Umformungen einer Matrix wirken sich folgendermaßen auf die Determinante aus:
1. Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
2. Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit der Zahl a, so multipliziert sich die Determinante mit a.
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) ändert den Wert der Determinante nicht.

4.4 Basis- und Koordinatentransformation

Es seien $A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n\end{pmatrix}$ Basen eines Vektorraums. Die Matrix F bildet mit $F\cdot A$ die Basis A auf die Basis B ab: $B=F\cdot A$.

Basiswechsel	Matrix der Basistransformation	Matrix der Koordinatentransformation
$A\rightarrow B$	$F=B\cdot A^{-1}$	$T=B^{-1}\cdot A$
$B\rightarrow A$	$F^{-1}=A\cdot B^{-1}$	$S=T^{-1}=A^{-1}\cdot B$

4.5 Kern und Bild

4.5.1 Kern (Nullraum) von f

$$\text{Kern } f := \left\{\vec{v}\in V : f(\vec{v})=\vec{0}\right\}\subset V$$

4.5.2 Bild (Bildraum) von f

$$\text{Bild } f := \left\{\vec{w}\in W : \vec{w}=f(\vec{v}) \text{ und } \vec{v}\in V\right\}\subset W$$

4.5.3 Dimensionsformeln

$$\dim \text{Bild } A + \dim \text{Kern } A = \dim V$$

für endlich dimensionale Vektorräume:

$$\dim \text{Bild } f + \dim \text{Kern } f = \dim V$$

4.5.4 Sätze

L(V,W)

f injektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim \text{Bild } f$

f surjektiv $\Leftrightarrow \dim W = \dim \text{Bild } f$

f bijektiv $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$

5 Folgen und Reihen

5.1 Konvergenzkriterien von Reihen

5.1.1 Quotientenkriterium von D'ALEMBERT

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \frac{a_{n+1}}{a_n}<q<1 \\ \text{unbestimmbar} & \frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \\ \text{divergent} & \frac{a_{n+1}}{a_n}>q>1 \end{cases}$$

5.1.2 Wurzelkriterium von CAUCHY

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & \sqrt[n]{a_n}<q<1 \\ \text{unbestimmbar} & \sqrt[n]{a_n}=1 \\ \text{divergent} & \sqrt[n]{a_n}>q>1 \end{cases}$$

5.1.3 Integralvergleichskriterium von CAUCHY

$f:[m,+\infty)\to\mathbf{R}$ stetige, monoton fallende, positive Funktion und $a_k:=f(k)$

$\to \sum\limits_{k=m}^{\infty}a_k$ und $\int\limits_m^{+\infty}f(x)dx$ haben dasselbe Konvergenzverhalten.

Fehlereinschließung des Reihenrestes $\sum\limits_{k=N}^{\infty}a_k : \int\limits_N^{\infty}f(x)dx \le \sum\limits_{k=N}^{\infty}a_k \le a_N+\int\limits_N^{\infty}f(x)dx$

5.1.4 LEIBNIZ-Kriterium

Eine alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$, $(a_k>0)$, ist konvergent, wenn (a_k) eine monotone Nullfolge ist.

5.1.5 Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Gegeben eine Potenzreihe von der Form $P(x):=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x^k$

$$\rho_1=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \rho_2=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

$|x|<\rho$: Die Reihe ist absolut konvergent
$|x|>\rho$: Die Reihe ist divergent

5.2 Wichtige Folgen und Reihen

5.2.1 Wichtige Folgen

$\sqrt[n]{a}\to 1$	$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e$	$\frac{a^n}{n!}\to 0$
$\sqrt[n]{n}\to 1$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$	$\frac{n^n}{n!}\to\infty$
$\sqrt[n]{n!}\to\infty$	$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$	$\frac{a^n}{n^k}\to\infty \begin{cases} a>1 \\ k \text{ fest}\end{cases}$

$$\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{n!}\to\frac{1}{e} \qquad \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\to e^{-x} \qquad \frac{a^n}{n^k}\to 0\begin{cases}0<a<1\\ k \text{ fest}\end{cases}$$

5.2.2 Wichtige Reihen

5.2.2.1 Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau dann, wenn $|q|<1$ ist, gegen den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad |q|<1$$

Die endliche geometrische Reihe konvergiert gemäß $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \qquad q \neq 1.$

5.2.2.2 Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konvergiert genau, wenn $a>1$ ist.

6 Differentialrechnung

6.1 Ableitungsregeln

6.1.1 Summenregel

$$(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

6.1.2 Produktregel

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

6.1.3 Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

6.1.4 Kettenregel

$$(g\circ f)'(x_0)=g'[f(x_0)]\cdot f'(x_0)$$

6.1.5 Ableitung der Umkehrfunktion

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'\left[f^{-1}(y_0)\right]}$$

6.1.6 Logarithmisches Differenzieren

$$f'(x_0)=f(x_0)\cdot\left(\ln|f(x_0)|\right)'$$

6.2 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f(x)-f(x_0)=f'(\zeta)(x-x_0) \qquad \zeta\in(x_0,x)$$

$$f(x)-f(x_0)=f'[x_0+\theta\cdot(x-x_0)](x-x_0) \qquad \theta\in(0,1)$$

6.3 L'HOSPITAL-Regeln

$\frac{\infty}{\infty}$ $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$0\cdot\infty$ $$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$$

Stattdessen: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\frac{0}{0}$ oder $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\frac{\infty}{\infty}$

$\infty-\infty$ $$\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x)=\infty-\infty$$

Stattdessen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\left[1-\frac{g(x)}{f(x)}\right]$

0^0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=0^0$ Umformung: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]}=e^{0\cdot\infty}$

∞^0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\infty^0$ Umformung: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]}=e^{0\cdot\infty}$

1^∞ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=1^\infty$ Umformung: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]}=e^{\infty\cdot 0}$

6.4 TAYLOR-Polynome

6.4.1 TAYLOR-Polynom

TAYLOR-Polynom n-ten Grades der Funktion $f(x)$ im Entwicklungspunkt x_0 mit der Darstellung

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k$$

6.4.2 LAGRANGE-Restglied

Falls die (n+1)-te Ableitung im Entwicklungspunkt existiert so hat das Restglied die LAGRANGE-Darstellung

$$R_n(x;x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(\zeta) \qquad \zeta:=x_0+\theta(x-x_0) \qquad \theta\in(0,1)$$

6.4.3 Integral-Restglied

Falls die (n+1)-te Ableitung im Entwicklungspunkt existiert so hat das Restglied die Integral-Darstellung

$$R_n(x;x_0)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

6.4.4 Wichtige TAYLOR-Reihen mit LAGRANGE-Restgliedern

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \qquad \theta \in (0,1)$$

$$\ln x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k + \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)\zeta^{n+1}} \qquad \zeta := 1 + \theta \cdot (x-1) \quad \theta \in (0,1)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos \theta \cdot x \qquad \theta \in (0,1)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta \cdot x \qquad \theta \in (0,1)$$

6.5 Wichtige Ableitungen

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(x^p\right)' = \left(e^{p \ln x}\right)' = \frac{p}{x} e^{p \ln x} = p x^{p-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left({}^a\log x\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} {}^a\log e$$

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = \left(\ln x + \frac{x}{x}\right) e^{x \ln x} = (1 + \ln x) x^x$$

$$\left(\arcsin_H x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arccos_H x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\arctan_H x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\operatorname{arccot}_H x\right)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

7 Integralrechnung

7.1 Integrationsregeln

7.1.1 Linearität

$$\int \left(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\right) dx = \lambda \cdot \int f(x)dx + \mu \cdot \int g(x)dx$$

7.1.2 Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

7.1.3 Substitutionsregel

$$\int^{g(x)} f(u)du = \int^{x} f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = \int_a^b f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

insbesondere: $\int f(x)dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)dx$

7.1.4 Integration der Umkehrfunktion

$$\int f^{-1}(y)dy = y \cdot f^{-1}(y) - \int^{f^{-1}(y)} f(x)dx$$

7.1.5 Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

7.1.6 Symmetrie

Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Spiegelsymmetrie: $f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$

7.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad m \le f(x) \le M \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a) \qquad \zeta \in [a,b]$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx \qquad \zeta \in [a,b]$$

7.3 Flächen- und Volumenmomente, Schwerpunkte

7.3.1 Flächenmoment

$$M_x := \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))dx$$

$$M_y := \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx = \frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx$$

7.3.2 Schwerpunkt in R^2

$\vec{x}_s := (x_s, y_s)^T \qquad x_s = \frac{M_x}{A} \qquad y_s = \frac{M_y}{A}$ A:Flächeninhalt der Fläche

7.3.3 Volumenmoment

$V = \int_a^b q(x)dx$ q: Querschnittsfläche

$M_x := \int_a^b x \cdot q(x)dx$ Analog M_y und M_z.

7.3.4 Schwerpunkt in R^3

$\vec{x}_s := (x_s, y_s, z_s)^T \qquad x_s = \frac{M_x}{V} \qquad y_s = \frac{M_y}{V} \qquad z_s = \frac{M_z}{V}$ V:Volumen des Körpers

7.4 Wichtige Integrale

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin_H x$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos_H x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan_H x$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} = \operatorname{arc}\cot_H x$$

8 Anhang

trigonometrische Funktionen

$$\sin x = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$