Kugelkoordinaten

$\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\alpha$

$x = r \sin\vartheta \cos\alpha$

$y = r \sin\vartheta \sin\alpha$

$z = r \cos\vartheta$

$d\vec{r} = (dr)\vec{e}_r + (r\, d\vartheta)\vec{e}_\vartheta + (r \sin\vartheta\, d\alpha)\vec{e}_\alpha$

$d\vec{a} = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\alpha\, \vec{e}_r$

$d\vec{a} = r \sin\vartheta\, dr\, d\alpha\, \vec{e}_\vartheta$

$d\vec{a} = r\, dr\, d\vartheta\, \vec{e}_\alpha$

$dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\alpha$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\vartheta\\ \vec{e}_\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\alpha & \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta\\ \cos\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & -\sin\vartheta\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\vartheta\\ \vec{e}_\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta\\ \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten

$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$

$x = r \cos\alpha$

$y = r \sin\alpha$

$z = z$

$d\vec{r} = (d\rho)\vec{e}_\rho + (\rho\, d\alpha)\vec{e}_\alpha + (dz)\vec{e}_{zz}$

$d\vec{a} = \rho\, d\alpha\, dz\, \vec{e}_\rho$

$d\vec{a} = d\rho\, dz\, \vec{e}_\alpha$

$d\vec{a} = \rho\, d\rho\, d\alpha\, \vec{e}_z$

$dV = \rho\, d\rho\, d\alpha\, dz$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\vartheta\\ \vec{e}_\alpha\end{pmatrix}$$

Kartesisch

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$d\vec{r} = (dx)\vec{e}_x + (dy)\vec{e}_y + (dz)\vec{e}_z$

$d\vec{a} = dy\, dz\, \vec{e}_x$

$d\vec{a} = dx\, dz\, \vec{e}_y$

$d\vec{a} = dx\, dy\, \vec{e}_z$

$dV = dx\, dy\, dz$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_\rho\\ \vec{e}_\alpha\\ \vec{e}_z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_x\\ \vec{e}_y\\ \vec{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\vartheta\\ \vec{e}_\alpha\end{pmatrix}$$