
Elektrotechnik Formeln

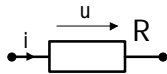
3. und 4. Semester

von Gerald Meier

1 Analyse von Einschwingvorgängen

1.1 Netzwerkelemente

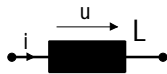
1.1.1 Widerstand



$$u(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

1.1.2 Induktivität

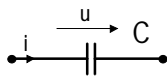


$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

i muß stetig sein

1.1.3 Kapazität



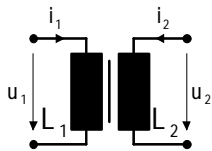
$$u(t) = u(t_0) + C \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

u muß stetig sein

1.1.4 Übertrager

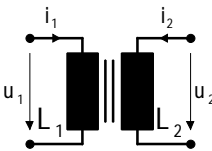
1.1.4.1 lose gekoppelter Übertrager



$$u_1(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \quad u_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

i_1 und i_2 müssen stetig sein

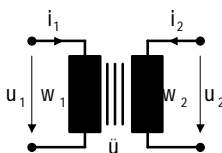
1.1.4.2 festgekoppelter Übertrager



$$u_1(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \quad u_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$i_M = w_1 \cdot i_1 + w_2 \cdot i_2$ muß stetig sein

1.1.4.3 idealer Übertrager

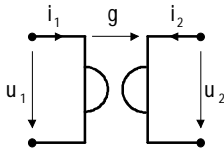


$$i_1 = -\frac{w_2}{w_1} \cdot i_2$$

$$\ddot{u}^2 = \frac{L_1}{L_2} \quad \ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$$

keine Stetigkeitsbedingungen

1.1.5 Gyrator



$$i_1(t) = g \cdot u_2(t)$$

$$i_2(t) = -g \cdot u_1(t)$$

$$u_1(t) = -\frac{i_2(t)}{g}$$

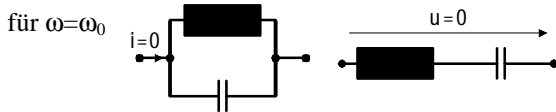
$$u_2(t) = \frac{i_1(t)}{g}$$

keine Stetigkeitsbedingungen

1.2 Schwingkreise

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \begin{cases} \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} & \text{im Reihenschwingkreis} \\ \frac{L}{\omega_0 R} = \omega_0 RC = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} & \text{im Parallelschwingkreis} \end{cases}$$



1.3 Stabilitätstests

1.3.1 Asymptotische Stabilität

- $\text{Re } p_v < 0$ (6.127)
- $D(p)$ HURWITZ-Polynom
- alle Koeffizienten von $D(p)$ haben gleiches Vorzeichen falls der Grad von $D(p)$ kleiner 3 ist

1.3.2 HURWITZ-Determinanten

Systemdeterminante: $D(p) = c_s p^s + c_{s-1} p^{s-1} + \dots + c_1 p + c_0$ mit $c_s > 0$

$$\Delta_\mu := \begin{vmatrix} c_{s-1} & c_s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{s-3} & c_{s-2} & c_{s-1} & c_s & 0 & \dots & 0 \\ c_{s-5} & c_{s-4} & c_{s-3} & c_{s-2} & c_{s-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s-2\mu+1} & c_{s-2\mu+2} & c_{s-2\mu+3} & c_{s-2\mu+4} & c_{s-2\mu+5} & \dots & c_{s-\mu} \end{vmatrix}$$

NW ist asymptotisch stabil ($\text{Re } p_v < 0$) \Leftrightarrow alle $\Delta_\nu > 0$

1.4 Analyse von Einschwingvorgängen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$$

1.4.1 homogene Lösung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} \quad \mathbf{z}_{h\mu} = (\mathbf{K} + t \cdot \mathbf{K}_1 + t^2 \cdot \mathbf{K}_2 + \dots) \cdot e^{\lambda_\mu \cdot t}$$

1.4.2 inhomogene Lösung

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{F} \cdot \int \mathbf{F}^{-1}(\tau) \cdot \mathbf{x}(\tau) d\tau \quad \mathbf{F} = (\mathbf{z}_{h1} \quad \mathbf{z}_{h2} \quad \dots \quad \mathbf{z}_{hn})$$

1.5 Analyse durch LAPLACE-Transformation

1.5.1 LAPLACE-Transformation

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} \quad p = \sigma + j\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$

$$f(t) \text{ --- } \bullet F(p)$$

1.5.2 Eigenschaften

1.5.2.1 Linearität

$$f(t) \text{ --- } \bullet F(p), \quad g(t) \text{ --- } \bullet G(p)$$

$$c_1 \cdot f(t) + c_2 \cdot g(t) \text{ --- } \bullet c_1 \cdot F(p) + c_2 \cdot G(p)$$

1.5.2.2 Zeitverschiebung

$$f(t) \text{ --- } \bullet F(p)$$

$$f(t - t_0) \text{ --- } \bullet F(p) \cdot e^{-pt_0}$$

1.5.2.3 Frequenzverschiebung

$$f(t) \text{ --- } \bullet F(p)$$

$$f(t) \cdot e^{p_0 t} \text{ --- } \bullet F(p - p_0)$$

1.5.2.4 Differentiation im Zeitbereich

$$s(t) \cdot f(t) \text{ --- } \bullet F(p)$$

$$\frac{d}{dt} [s(t) \cdot f(t)] \text{ --- } \bullet p \cdot F(p)$$

$$s(t) \cdot \frac{d}{dt} f(t) \text{ --- } \bullet p \cdot F(p) - f(0)$$

$$s(t) \cdot \frac{d^2}{dt^2} f(t) \text{ --- } \bullet p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \frac{d}{dt} f(0)$$

$$s(t) \cdot \frac{d^3}{dt^3} f(t) \text{ --- } \bullet p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot \frac{d}{dt} f(0) - \frac{d^2}{dt^2} f(0)$$

1.5.2.5 Ähnlichkeitssatz

$$s(t) \cdot f(t) \text{ --- } \bullet F(p)$$

$$s(a \cdot t) \cdot f(a \cdot t) \text{ --- } \bullet \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

1.5.3 wichtige Beziehungen

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$s(t)$	$\frac{1}{p}$
$t \cdot s(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{1}{2} t^2 \cdot s(t)$	$\frac{1}{p^3}$

$s(t) \cdot e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$
$s(t) \cdot t \cdot e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$s(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p^2 + \omega_0^2)}$
$s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)}$
$s(t) \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p-a)^2 + \omega_0^2}$
$s(t) \cdot t \cdot e^{at} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{2\omega_0(p-a)}{[(p-a)^2 + \omega_0^2]^2}$
$s(t) \cdot \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^\mu}$

2 Netzwerke mit nichtlinearen zeitvarianten Elementen

$$u(t) = \frac{d}{dt} \Phi \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} q \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

2.1 Elemente

2.1.1 Widerstand

$$F_R(i, u) = 0 \quad \begin{array}{ll} u = f_R(i) & \text{stromgesteuert} \quad \rightarrow \text{Strom ist Zustandsvariable} \\ i = g_R(u) & \text{spannungsgesteuert} \quad \rightarrow \text{Spannung ist Zustandsvariable} \end{array}$$

2.1.2 Induktivität

$$u(t) = \frac{d}{dt} \Phi$$

$$F_L(\Phi, i) = 0 \quad \begin{array}{ll} \Phi = f_L(i) & \text{stromgesteuert} \quad \rightarrow \text{Strom ist Zustandsvariable} \\ i = g_L(\Phi) & \text{flußgesteuert} \quad \rightarrow \text{Fluß ist Zustandsvariable} \\ \Phi = Li & \text{linearer Fall} \end{array}$$

2.1.3 Kapazität

$$i(t) = \frac{d}{dt} q$$

$$F_C(q, u) = 0 \quad \begin{array}{ll} u = f_C(q) & \text{ladungsgesteuert} \quad \rightarrow \text{Ladung ist Zustandsvariable} \\ q = g_C(u) & \text{spannungsgesteuert} \quad \rightarrow \text{Spannung ist Zustandsvariable} \\ q = Cu & \text{linearer Fall} \end{array}$$

2.1.4 Übertrager

$$\underline{u}(t) = \frac{d}{dt} \underline{\Phi} \quad \underline{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad \underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$F_L(\underline{\Phi}, \underline{i}) = 0 \quad \underline{\Phi} = f_L(\underline{i}) \quad \text{stromgesteuert}$$

$$\underline{i} = g_L(\underline{\Phi}) \quad \text{flußgesteuert}$$

$$\underline{\Phi} = L \underline{i} \quad \text{linearer Fall}$$

2.2 Gleichgewichtspunkte

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1, \dots, z_n) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\vdots \quad \Rightarrow \quad \text{Gleichgewichtspunkte } z_{g1}, \dots, z_{gn}$$

$$\dot{z}_n = f_n(z_1, \dots, z_n) \stackrel{!}{=} 0$$

Stabilitätsuntersuchung über JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad \text{falls } D(p) = \det(p\mathbf{E} - \mathbf{J}) \text{ HURWITZ-Polynom} \rightarrow \text{stabil}$$

vgl. UNBEHAUEN: „Grundlagen der Elektrotechnik 2“ Seite 216

2.3 periodisches Verhalten

2.3.1 ohne Variablentransformation

$$\frac{dz}{dt} = f(z)$$

$$t - t_0 = \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\underbrace{f(\zeta)}_{F(z(t))}}$$

2.3.2 mit Variablentransformation

$$y = f(z) \quad z = g(y)$$

$$\frac{dz}{dt} = y \quad \frac{dz}{dt} = g'(y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{g'(y)}$$

$$t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{g'(\eta)}{\eta} d\eta$$

2.4 Leistung und Energie

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$E(t) = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt$$

2.4.1 Widerstand

passiv: $u(t) \cdot i(t) \geq 0$

streng passiv $u(t) \cdot i(t) > 0$

passiv bzgl. \hat{u}, \hat{i} $(u - \hat{u}) \cdot (i - \hat{i}) \geq 0$

lokal passiv bzgl. \hat{u}, \hat{i} $(u - \hat{u}) \cdot (i - \hat{i}) \geq 0$ in Umgebung von \hat{u}, \hat{i}

2.4.2 Kapazität

2.4.2.1 ladungsgesteuert

$$E = \int_{q_0}^{q_1} g(\gamma) d\gamma$$

zeitinvarianter, linearer Fall: $E = \frac{1}{2C}(q_2^2 - q_1^2) = \frac{1}{2}C(u_2^2 - u_1^2)$

2.4.2.2 spannungsgesteuert

$$E = \left[u \cdot f(u) - \int_0^u f(x) dx \right]$$

2.4.2.3 nicht ladungs- oder spannungsgesteuert

$$\frac{d}{dt} E = u(t) \cdot i(t)$$

2.4.3 Induktivität

2.4.3.1 stromgesteuert

$$E = \left[i \cdot f(i) - \int_0^i f(x) dx \right]$$

2.4.3.2 flußgesteuert

$$E = \int_{\Phi_0}^{\Phi_1} g(\psi) d\psi$$

zeitinvarianter, linearer Fall: $E = \frac{1}{2L}(\Phi_2^2 - \Phi_1^2) = \frac{1}{2}L(i_2^2 - i_1^2)$

2.4.3.3 nicht strom- oder flußgesteuert

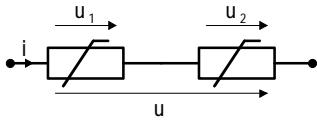
$$\frac{d}{dt} E = u(t) \cdot i(t)$$

2.5 Widerstandsnetzwerke

2.5.1 Widerstandszweipole

2.5.1.1 Reihen- und Parallelschaltung

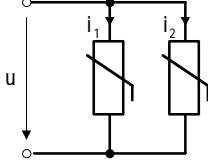
Reihenschaltung



$$u_1 = f_{R1}(i) \quad u_2 = f_{R2}(i) \quad u = f_R(i)$$

$$f_R(i) = f_{R1}(i) + f_{R2}(i)$$

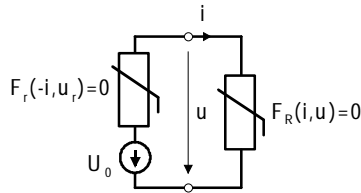
Parallelschaltung



$$i_1 = g_{R1}(u) \quad i_2 = g_{R2}(u) \quad i = g_R(u)$$

$$g_R(u) = g_{R1}(u) + g_{R2}(u)$$

2.5.1.2 Arbeitspunktbestimmung



$$F_R(i, u) = 0$$

$$F_r(-i, u - u_0) = 0$$

2.5.1.3 Kleinsignalanalyse

$$i(t) = I_A + \tilde{i}(t)$$

$$u(t) = U_A + \tilde{u}(t)$$

$$a := \left. \frac{\partial F_R(i, u)}{\partial i} \right|_A$$

$$b := \left. \frac{\partial F_R(i, u)}{\partial u} \right|_A$$

$$a \tilde{i} + b \tilde{u} = 0$$

$$c \tilde{i} + d \tilde{u} = d \tilde{u}_0$$

$$c := - \left. \frac{\partial F_r(-i, u - u_0)}{\partial (-i)} \right|_A$$

$$d := \left. \frac{\partial F_r(-i, u - u_0)}{\partial (u - u_0)} \right|_A$$

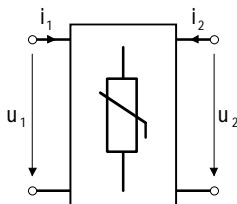
$$R_A = -\frac{a}{b}$$

$$R_i = \frac{c}{d}$$

$$-R_A \tilde{i} + \tilde{u} = 0$$

$$R_i \tilde{i} + \tilde{u} = \tilde{u}_0$$

2.5.2 Widerstandszweitore

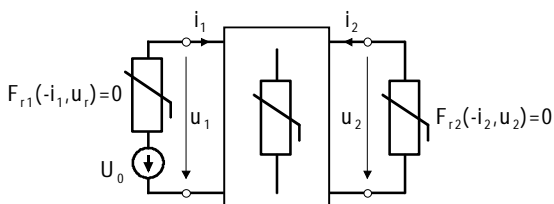


$$F_{1R}(i_1, u_1, i_2, u_2) = 0$$

$$F_{2R}(i_1, u_1, i_2, u_2) = 0$$

→ Darstellungen vgl. UNBEHAUEN: „Grundlagen der Elektrotechnik 2“ S.161

2.5.2.1 Arbeitspunktbestimmung



$$F_{1R}(i_1, u_1, i_2, u_2) = 0$$

$$F_{2R}(i_1, u_1, i_2, u_2) = 0$$

$$F_{r1}(-i_1, u_r) = 0$$

$$F_{r2}(-i_2, u_2) = 0$$

2.5.2.2 Kleinsignalanalyse

$$i_1(t) = I_{1A} + \tilde{i}_1(t) \quad u_1(t) = U_{1A} + \tilde{u}_1(t)$$

$$i_2(t) = I_{2A} + \tilde{i}_2(t) \quad u_2(t) = U_{2A} + \tilde{u}_2(t)$$

$$a_v := \left. \frac{\partial F_{vR}(i_1, u_1, i_2, u_2)}{\partial i_1} \right|_A \quad b_v := \left. \frac{\partial F_{vR}(i_1, u_1, i_2, u_2)}{\partial u_1} \right|_A \quad \begin{aligned} a_1 \tilde{i}_1 + b_1 \tilde{u}_1 + c_1 \tilde{i}_2 + d_1 \tilde{u}_2 &= 0 \\ a_2 \tilde{i}_1 + b_2 \tilde{u}_1 + c_2 \tilde{i}_2 + d_2 \tilde{u}_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$c_v := \left. \frac{\partial F_{vR}(i_1, u_1, i_2, u_2)}{\partial i_2} \right|_A \quad d_v := \left. \frac{\partial F_{vR}(i_1, u_1, i_2, u_2)}{\partial u_2} \right|_A$$

$$a_3 := \left. \frac{\partial F_{r1}(-i_1, u_1 - u_0)}{\partial(-i_1)} \right|_A \quad b_3 := \left. \frac{\partial F_{r1}(-i_1, u_1 - u_0)}{\partial(u_1 - u_0)} \right|_A \quad a_3 \tilde{i}_1 + b_3 \tilde{u}_1 = b_3 \tilde{u}_0$$

$$a_4 := \left. \frac{\partial F_{r2}(-i_2, u_2)}{\partial(-i_2)} \right|_A \quad a_4 := \left. \frac{\partial F_{r2}(-i_2, u_2)}{\partial u_2} \right|_A \quad a_4 \tilde{i}_2 + b_4 \tilde{u}_2 = 0$$

$$r_1 = \frac{a_3}{b_3} \quad r_2 = \frac{a_4}{b_4} \quad r_1 \tilde{i}_1 + \tilde{u}_1 = \tilde{u}_0 \quad r_2 \tilde{i}_2 + \tilde{u}_2 = 0$$

3 Normierung

3.1 Normierung von Netzwerken

$$U_N = \frac{U}{U_0} \quad I_N = \frac{I}{I_0} \quad R_N = \frac{R}{R_0} \quad \omega_N = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \cdot t_0 \quad t_N = \frac{t}{t_0} = t \cdot \omega_0$$

$$R_0 = \frac{1}{\omega_0 \cdot C_0} \rightarrow C_0 = \frac{1}{\omega_0 \cdot R_0} \rightarrow C_N = \frac{C}{C_0} = C \cdot \omega_0 \cdot R_0$$

$$R_0 = \omega_0 \cdot L_0 \rightarrow L_0 = \frac{R_0}{\omega_0} \rightarrow L_N = \frac{L}{L_0} = \frac{L \cdot \omega_0}{R_0}$$

3.2 Normierung der Zeit

$$\tau = \omega_0 \cdot t = \frac{t}{T} \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d}{dt} = T \cdot \frac{d}{dt}$$

4 Mathematischer Anhang

4.1 Matrizen

4.1.1 Matrix-Invertierung

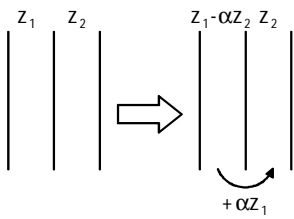
für n = 2 gilt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für n > 2 gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A \quad \text{mit} \quad \text{adj}A = \left[(-1)^{i+j} D_{i+j} \right]^T \quad D_{i+j}: \text{Determinante ohne } i\text{-te Zeile und } j\text{-te Spalte}$$

4.1.2 Spalten-Addition



$$\begin{aligned} \vec{k}_1 z_1 + \vec{k}_2 z_2 + \dots &= \vec{k}_1 z_1 - \alpha \vec{k}_1 z_2 + \alpha \vec{k}_1 z_2 + \vec{k}_2 z_2 + \dots \\ &= \vec{k}_1 (z_1 - \alpha z_2) + (\alpha \vec{k}_1 + \vec{k}_2) z_2 + \dots \end{aligned}$$

4.1.3 Diagonalisierung

\vec{v}_i : Eigenvektoren von A

$$(\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_n)^{-1} \cdot A \cdot (\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_n) = D \quad D: \text{Diagonalmatrix}$$

4.1.4 Ermittlung von Hauptvektoren

Eigenvektoren: $(\lambda E - A) \cdot \vec{k} = 0$

Hauptvektoren: $(\lambda E - A) \cdot \vec{k} = -\vec{k}_1$
 $(\lambda E - A) \cdot \vec{k}_1 = -2\vec{k}_2$

$(\lambda E - A) \cdot \vec{k}_2 = \vec{0} \rightarrow \text{UNBEHAUEN: „Grundlagen der Elektrotechnik 2“ Seite 53}$

4.2 Sonstiges

4.2.1 EULERSche Formel

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi$

$X \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} [\underline{X} \cdot e^{j\omega_0 t} + \underline{X}^* \cdot e^{-j\omega_0 t}]$

$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = \text{Re}(e^{j\varphi})$

$\sin\varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) = \text{Im}(e^{j\varphi})$

$\underline{X} = X \cdot e^{j\varphi}$

4.2.2 Umformungen

$\cos\left(\arctan\frac{a}{b}\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sin\left(\arctan\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

4.2.3 einfaches Integral

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|x|$