

ETG-Kurzschluß

Formelsammlung

Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung

Marcus Müller

überarbeitet von Klaus Kreuder

letzte Änderung: 8. September 1998

wichtige Hinweise:

- Diese Formelsammlung wurde anlässlich der Prüfung im Oktober 1997 geschrieben, die unter Leitung von Priv. Doz. Dr.-Ing. habil. P. Steffen stattfand. Sie hat sich in der Prüfung sehr positiv bewährt; in ihr steckt aber auch jede Menge Arbeit, die hauptsächlich Marcus Müller geleistet hat.
- Zur Verfügung standen demnach das Schüßler-Buch 4.Auflage, das Lehrstuhl-Skript 2, das Übungsaufgaben-Skript, das Steffen-Skript, ein Girod-DigSil-Skript und natürlich ein Bronstein. Da die Bücher nicht immer in einer einheitlichen Ausgabe vorhanden waren, sind die Querverweise teils irreführend.
- Für die Richtigkeit wird natürlich in keinsten Weise irgendeine Gewähr übernommen!
- Die Weitergabe darf nur komplett erfolgen, das heißt inklusiv dieser Titelseite mit dem Autorenvermerk.
- Für die ETG-Internetseiten versuche ich nun, diese Formelsammlung wiederzubeleben, zu ergänzen und kleinere Fehler zu beseitigen. Daß dies nach knapp einem Jahr ziemlich schwierig ist, dürfte jeder einsehen.
- Ich bin bereit, weiter daran zu arbeiten. Deshalb Fehler, falsche Querverweise etc. unter genauer(!) Beschreibung der Plazierung mir per eMail (klaus.kreuder@e-technik.stud.uni-erlangen.de) zukommen lassen. Wichtige Ergänzungen und Neuerungen können auch aufgenommen werden, wenn Ihr mir den \LaTeX -Code zusendet. Aber: nicht hetzen; alles nur, wenn ich Zeit und Lust habe!

Inhaltsverzeichnis

1	Allgemeine Formeln	4
1.1	Normen	4
1.2	Rechenoperationen	4
1.3	Z-Transformation	4
1.4	Diskrete Fouriertransformation	5
1.5	Standardzerlegungen	5
1.6	Geometrische Reihe	6
1.7	sin,cos und Konsorten	6
2	DFT	7
2.1	DFT allgemein	7
2.2	Symmetrien der DFT	7
2.3	Negative, gerade und ungerade Folge	7
2.4	Abtasttheorem	7
2.5	Zyklische Verschiebung	8
2.6	DFT-Berechnung bei zyklischer Verschiebung	8
2.7	Lineare Faltung mit der DFT	8
2.8	Zyklische Faltung	8
2.8.1	Berechnung	9
2.9	DFT der Impulsantwort	9
2.10	Tabellen	9
2.11	Beispiele	9
2.12	AKF	10
3	Z-Transformation allgemein	11
3.1	Z-Transformierte und inverse Z-Transformierte einer Folge	11
3.1.1	Z-Transformierte	11
3.1.2	Inverse Z-Transformation	11
3.2	Bestimmung von $H(z)$ aus Angaben	11
3.3	Bestimmung von $H(z)$ aus $h_0(k)$	11
3.3.1	$h_0(k)$ einzelne Werte	11
3.3.2	$h_0(k)$ geschlossen gegeben	11
3.3.3	Grad von $H(z)$	12
3.4	Impulsantwort $h_0(k)$ aus $H(z)$	12
3.5	Sprungantwort $h_{-1}(k)$ aus $H(z)$	12
3.6	$H(z)$ aus Differenzgleichung und umgekehrt	12
3.7	Systemmatrizen/Zustandsdarstellung aus Übertragungsfunktion	12
3.8	$x(k), h_{-1}(k), H(z), H(z=1), Y(z)$ aus Systemmatrizen A,B,C,D	12
3.9	Einschwing.- u. Erregeranteil	13
3.10	Energie von $h_0(k)$	13
3.11	Schaltfolge/Unterabtastung	13
3.12	Spreizung einer Folge	15
4	Frequenzgang $H(e^{j\Omega})$	17
4.1	$H(e^{j\Omega})$ aus $H(z)$	17
4.2	Spiegel- oder Antispiegelpolynome	17
4.3	Betrag $ H(e^{j\Omega}) $	18

4.3.1	Allgemein	18
4.4	Allpaß	18
4.4.1	Für einzelne Werte, z.B. zum Skizzieren	18
4.5	Phase $b(\Omega)$ aus $H(e^{j\Omega})$	18
4.5.1	Allgemein	19
4.5.2	Allpaß	19
4.5.3	Phase für bestimmte Werte	19
4.6	Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega)$	20
4.6.1	Gruppenlaufzeit allgemein	20
4.6.2	Gruppenlaufzeit eines Allpasses	20
4.7	Cepstrum	21
5	Systemeigenschaften aus PN	22
5.1	Reelwertig	22
5.2	Kausal	22
5.3	Umwandeln eines Systems in ein kausales System	22
5.4	Stabilität	22
5.4.1	Stabilität bei einem System 2.Grades	23
5.4.2	Stabilität mit dem Schur-Cohn-Test	23
5.4.3	Stabilisieren eines Systems	24
5.5	Linearphasig	24
5.6	Rekursiv/nicht Rekursiv	25
5.7	Allpass	25
5.8	Minimal-/Maximalphasig	25
5.9	Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, Bandsperre, Allpaß	26
6	Realisierung/Prony	27
7	Nichtrekursive Systeme	28
7.1	$H(z)$ aus $H_0(e^{j\Omega})$	28
7.2	$H(z)$ aus Werten für $H_0(e^{j\Omega})$	28
7.3	Fourier-Reihenentwicklung (linearer Phase)	28
7.4	Fourierapproximation	28
7.5	Kaiserfenster	28
7.5.1	Koeffizienten mit Kaiser	29
7.6	Tschebyscheff	29
7.7	Minimalphasiges System	30
7.8	TP/HP/BP-Transformation	30
7.9	Grade	31
7.10	Frequenzen	31
8	Rekursive Systeme	32
8.1	Allgemeines Vorgehen	32
8.2	Umrechnung Toleranzschemata	33
8.3	Toleranzen bei Zusammenschaltungen	33
8.4	Toleranzen beim Entwurf minimalphasiger FIR Filter	33
8.5	Bilineare Transformation (TP)	34
8.6	Potenzverhalten	34
8.7	Tschebyscheff DB	35

8.8	Tschebyscheff SB	35
8.9	Cauerfilter	35
8.10	Bestimmung von C, falls Grad n gegeben	35
8.11	Bestimmung von Δ_1, Δ_2 , wenn C und \tilde{K} gegeben	36
8.12	Berechnung Toleranzschema $H(e^{j\Omega})$ aus \tilde{K}	36
8.13	Abtastfrequenz	36
9	Rauschzahlen	37
9.1	Rauschzahlen	37
9.2	Gesamtstörleistung	37
9.3	Berechnung des Residuums	37
9.4	Aufstellen von $H(z)$	37
9.5	Standardfälle	37
9.5.1	System 1.Ordnung	37
9.5.2	System 2.Ordnung	37
9.6	Anmerkungen	38
9.7	Auswirkung von Faktoren	38
9.8	Zusammenhang zwischen Energie und Rauschzahl	38
9.9	Zusätzliche Wortlänge	38

1 Allgemeine Formeln

1.1 Normen

- l_p -Norm:

$$\|v(k)\|_p = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

- ist eine Folge $\in l_1$, so ist sie absolut summierbar
- ist eine Folge $\in l_2$, so hat sie endliche Energie
- ist eine Folge $\in l_n$, so ist sie auch $\in l_{n+1}$
- ist eine Folge $\notin l_2$, so existiert gegebenenfalls die mittlere Leistung:

$$\overline{|v(k)|^2} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{+K} |v(k)|^2$$

1.2 Rechenoperationen

- Faltung:

$$v(k) * u(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} v(\kappa) u(k \leftrightarrow \kappa)$$

- Zyklische Faltung:

$$v[k] \textcircled{M} u(k) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} v(k) u((k \leftrightarrow \kappa)_{\text{mod } M})$$

- Gerader Anteil

$$v_g(k) = \frac{1}{2} [v(k) + v(\leftrightarrow k)] = \begin{cases} v(0), \text{ für } k = 0 \\ v_g(M \leftrightarrow k), \text{ für } k = 1(1)M \leftrightarrow 1 \end{cases}$$

- Ungerader Anteil

$$v_u(k) = \frac{1}{2} [v(k) \leftrightarrow v(\leftrightarrow k)] = \begin{cases} 0, \text{ für } k = 0 \\ \leftrightarrow v_u(M \leftrightarrow k), \text{ für } k = 1(1)M \leftrightarrow 1 \end{cases}$$

1.3 Z-Transformation

Z-Transformierte einer Folge $v(k)$:

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k) z^{-k}$$

Inverse Z-Transformierte:

$$v(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} V(z) z^{k-1} dz$$

1.4 Diskrete Fouriertransformation

DFT:

$$DFT_M\{v(k)\} = V(\mu) = \sum_{k=0}^{M-1} v(k)w_M^{\mu k}, \quad \mu = 0(1)M \Leftrightarrow 1$$

$$\text{mit } w_M = e^{-\frac{2\pi j}{M}}$$

Inverse DFT:

$$DFT_M^{-1}\{V(\mu)\} = v(k) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V(\mu)w_M^{-\mu k}, \quad k = 0(1)M \Leftrightarrow 1$$

Sätze:

- Faltung:

$$v(k) \circledast u(k) = V(\mu)U(\mu)$$

falls Länge von $V(\mu)$ und $U(\mu)$ jeweils \geq Länge von $v(k)$ +Länge von $u(k)$ -1.

Beispiel: Länge von $u(k)=2$, $v(k)=3 \Rightarrow$ Länge der Faltung = $2+3-1 = 4$. \Rightarrow Soll die Faltung mit der DFT durchgeführt werden, muss die DFT mindestens der Länge 4 auf beide Folgen angewandt werden, sonst Aliasing.

- Parseval: Energie läßt sich im Frequenz- und im Zeitbereich bestimmen

$$\|v(k)\|_2^2 = \frac{1}{M} \|V(\mu)\|_2^2$$

1.5 Standardzerlegungen

$$z^2 \Leftrightarrow z + 1 = \left[z \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[z \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \left(z \Leftrightarrow e^{j\frac{\pi}{3}} \right) \left(z \Leftrightarrow e^{-j\frac{\pi}{3}} \right)$$

Pole auf Einheitskreis \Rightarrow nicht stabil, bedingte Stabilität bei einfachen Polen

$$\begin{aligned} z^n \Leftrightarrow 1 &= \prod_{\nu=0}^{N-1} (z \Leftrightarrow e^{j2\pi\frac{\nu}{N}}) \\ z^3 \Leftrightarrow 1 &= (z \Leftrightarrow 1)(z^2 + z + 1) \\ z^4 \Leftrightarrow 1 &= (z \Leftrightarrow 1)(z^3 + z^2 + z + 1) = (z^2 + 1)(z^2 \Leftrightarrow 1) \\ z^5 \Leftrightarrow 1 &= (z \Leftrightarrow 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \\ z^6 \Leftrightarrow 1 &= (z \Leftrightarrow 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \\ &= (z^2 \Leftrightarrow z + 1)(z^4 + z^3 \Leftrightarrow z \Leftrightarrow 1) \\ z^8 \Leftrightarrow 1 &= (z \Leftrightarrow 1)(z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \\ &= (z \Leftrightarrow 1)(z^2 + 1)(z^5 + z^4 + z + 1) \\ &= (z^4 \Leftrightarrow 1)(z^4 + 1) \\ (z + 1)^2 &= z^2 + 2z + 1 \\ (z + 1)^3 &= z^3 + 3z^2 + 3z + 1 \\ (z + 1)^4 &= z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z \Leftrightarrow 1)^2 &= z^2 \Leftrightarrow 2z + 1 \\
(z \Leftrightarrow 1)^3 &= z^3 \Leftrightarrow 3z^2 + 3z \Leftrightarrow 1 \\
(z \Leftrightarrow 1)^4 &= z^4 \Leftrightarrow 4z^3 + 6z^2 \Leftrightarrow 4z + 1 \\
(z+1)^2(z \Leftrightarrow 1) &= z^3 + z^2 \Leftrightarrow z \Leftrightarrow 1 \\
(z+1)(z \Leftrightarrow 1)^2 &= z^3 \Leftrightarrow z^2 \Leftrightarrow z + 1 \\
(z+1)^3(z \Leftrightarrow 1) &= z^4 + 2z^3 \Leftrightarrow 2z \Leftrightarrow 1 \\
(z+1)^2(z \Leftrightarrow 1)^2 &= z^4 \Leftrightarrow 2z^2 + 1 \\
(z+1)(z \Leftrightarrow 1)^3 &= z^4 \Leftrightarrow 2z^3 + 2z \Leftrightarrow 1 \\
(z^2 + z + 1)^2 &= z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1
\end{aligned}$$

1.6 Geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n q^k &= \frac{q^{n+1} \Leftrightarrow 1}{q \Leftrightarrow 1} \\
\sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \frac{1}{1 \Leftrightarrow q}
\end{aligned}$$

1.7 sin, cos und Konsorten

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \Leftrightarrow 1} \right)$$

$$\operatorname{ld} x = \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{\lg x}{\lg 2}$$

2 DFT

2.1 DFT allgemein

•

$$DFT_M\{v(k)\} = V(\mu) = \sum_{k=0}^{M-1} v(k)w_M^{\mu k}$$

Länge M:

$$w_M = e^{-j\frac{2\pi}{M}}$$

•

$$DFT_M^{-1}\{V(\mu)\} = v(k) = \frac{1}{M} \sum_{\mu=0}^{M-1} V(\mu)w_M^{-\mu k}$$

- DFT entspricht Abtastung der Z-Transformierten an den Stellen $z = w_M^{-\mu}$

$$H(z) = 1 + z^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad H(\mu) = 1 + w_M^{2\mu}$$

2.2 Symmetrien der DFT

viele Korrespondenzhandeln, deshalb nicht ausgeführt

2.3 Negative, gerade und ungerade Folge

- $v(\Leftrightarrow k) = v([\Leftrightarrow k + M]_{\text{mod}M})$ Beispiel: $v(k) = \{3, 1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow v(-k) = \{3, 5, 4, 3, 2, 1\}$, also $v(0)$ gleichlassen, Rest Reihenfolge umdrehen
- $v_{\text{gerade}}(k)$ (const, cosinus)

$$v_g(k) = \frac{1}{2}[v(k) + v^*(M \Leftrightarrow k)] = \frac{1}{2}[v(k) + v(\Leftrightarrow k)]$$

Alle Werte außer $k=0$ symmetrisch

- $v_{\text{ungerade}}(k)$ (sinus)

$$v_u(k) = \frac{1}{2}[v(k) \Leftrightarrow v^*(M \Leftrightarrow k)] = \frac{1}{2}[v(k) \Leftrightarrow v(\Leftrightarrow k)]$$

$$v_u(0) = 0$$

Werte antisymmetrisch

2.4 Abtasttheorem

Abtasttheorem:

$$2f_{\text{max,Signal}} \leq f_{\text{Abtast}}$$

DFT der Länge M: Werte $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{M} \Rightarrow$ Spektrale Auflösung $\Delta f = \frac{f_{\text{Abtast}}}{M}$

2.5 Zyklische Verschiebung

$$v(k + \kappa) = v[(k + \kappa)_{\text{mod } M}]$$

Bsp.:

$$\begin{aligned} M &= 6 \\ v(k) &= \{v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5\} \\ v(k+2) &= \{v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_0 \ v_1\} \\ v(k \Leftrightarrow 2) &= \{v_4 \ v_5 \ v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3\} \\ v(\Leftrightarrow k) &= \{v_0 \ v_5 \ v_4 \ v_3 \ v_2 \ v_1\} \\ v(2 \Leftrightarrow k) &= \{v_2 \ v_1 \ v_0 \ v_5 \ v_4 \ v_3\} \end{aligned}$$

2.6 DFT-Berechnung bei zyklischer Verschiebung

$$\begin{aligned} V(\mu) &= \text{DFT}_M\{v(k)\} \\ w_M^{-\mu\kappa} V(\mu) &= \text{DFT}_M\{v(k + \kappa)\} \\ \hline v(k) &= \text{DFT}_M^{-1}\{V(\mu)\} \\ w_M^{k\lambda} v(k) &= \text{DFT}_M^{-1}\{V(\mu + \lambda)\} \end{aligned}$$

$w_M^{k\lambda}$ und $w_M^{-\mu\kappa}$ ausrechnen:

$w_M^{-\mu\kappa}$ für κ, M gegeben, z.B. $M=8, \kappa=2$

$$\Rightarrow w_M^{-\mu\kappa} = (w_M^{-\kappa})^\mu = \left[e^{(-j\frac{2\pi}{M})(-\kappa)} \right] = j^\mu$$

mit: $e^{j\frac{4\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

2.7 Lineare Faltung mit der DFT

keine periodische Wiederholung !

$$u_{ges}(k) = u_1(k) * u_2(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u_1(\kappa) \cdot u_2(k \Leftrightarrow \kappa)$$

Spiegeln von $u_2(k)$ und verschieben

Länge der linearen Faltung:

$L = M_1 + M_2 \Leftrightarrow 1$ M_1 =Länge von $u_1(k)$, M_2 =Länge von $u_2(k)$.

Länge: $u(k)=\{4,3,2,1,0,0,..\}$ hat Länge 4, die Nullen am Ende zählen nicht zur Länge.

2.8 Zyklische Faltung

$$y(k) = u(k) \textcircled{M} v(k) = \sum_{\kappa=0}^{M-1} u(\kappa) v(k \Leftrightarrow \kappa)$$

$y(k)$, $u(k)$ und $v(k)$ haben die Länge M , ansonsten mit Nullen auffüllen.

$Y(\mu) = U(\mu) \cdot V(\mu)$ Bestimmung von $v(k \Leftrightarrow \kappa)$: invertieren und zyklisch verschieben

2.8.1 Berechnung

- Beide Folgen auf Länge M bringen (notfalls mit Nullen auffüllen)

-

$$\begin{aligned}
 u_1(k) &= \{ \quad \quad \quad \} \\
 u_2(k) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5 \} \\
 u_2(\Leftrightarrow k) &= \{0, 5, 4, 3, 2, 1 \} \\
 u_2(1 \Leftrightarrow k) &= \{1, 0, 5, 4, 3, 2 \} \\
 u_2(2 \Leftrightarrow k) &= \{2, 1, 0, 5, 4, 3 \} \\
 \dots & \\
 u_5(5 \Leftrightarrow k) &= \{5, 4, 3, 2, 1, 0 \}
 \end{aligned}$$

$$u_{ges}(k) = \sum_{\kappa}^{M-1} u_1(\kappa) \cdot u_2(\Leftrightarrow \kappa)$$

mit Werten aus Tabelle ausrechnen.

2.9 DFT der Impulsantwort

$$\begin{aligned}
 h_0(k) &= \{3, 0, 4, 1, 0, 0, 0, 2\} = \\
 &= 3\gamma_0(k) + 4\gamma_0(k \Leftrightarrow 2) + 1\gamma_0(k \Leftrightarrow 3) + 2\gamma_0(k \Leftrightarrow 7)
 \end{aligned}$$

$$H(\mu) = 3 + 4w_8^{2\mu} + w_8^{3\mu} + 2w_8^{7\mu} = \{3, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

für μ Werte einsetzen und Drehfaktor (w_8) ausrechnen

2.10 Tabellen

$v(k)$	$V(\mu)$
$R_l(k) = \begin{cases} 1, & k = 0(1)l \Leftrightarrow 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ $0 < l \leq M$	$\frac{w_M^{\mu l} - 1}{w_M^{\mu} - 1} = e^{-j\pi(l-1)\mu/M} \frac{\sin l\mu\pi/M}{\sin \mu\pi/M}$
$z_0^k R_l(k), z_0 \in \mathbb{C}$	$\frac{(z_0 w_M^{\mu})^l \Leftrightarrow 1}{z_0 w_M^{\mu} \Leftrightarrow 1}$
$k R_l(k)$	$\frac{l w_M^{\mu l} [w_M^{\mu} - 1] - w_M^{\mu} [w_M^{\mu l} - 1]}{[w_M^{\mu} - 1]^2}$

2.11 Beispiele

- $u(k) = 1 \quad U(0) = M \quad U(\mu) = M \cdot \gamma_0(\mu)$
 $U(\mu) = 0$ sonst
- $u(k) = \sin k\Omega \quad U(\mu) = \frac{M}{2j} [\gamma_0(\mu \Leftrightarrow \frac{\Omega M}{2\pi}) \Leftrightarrow \gamma_0(\mu \Leftrightarrow M + \frac{\Omega M}{2\pi})]$
- $u(k) = \cos k\Omega \quad U(\mu) = \frac{M}{2} [\gamma_0(\mu \Leftrightarrow \frac{\Omega M}{2\pi}) + \gamma_0(\mu \Leftrightarrow M + \frac{\Omega M}{2\pi})]$

2.12 AKF

$$\varphi(k) = h_0(k) * h_0(\Leftrightarrow k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 e^{j\Omega k} d\Omega$$

Filter-AKF:

$$\Phi(z) = H(z) \cdot H(z^{-1})$$

Die Z-Transformierte der AKF von weißem Rauschen mit der Varianz $\sigma^2 = 1$ ist 1 (σ^2). Die Z-Transformierte der AKF heißt Leistungsdichtespektrum. Wird das Leistungsdichtespektrum einer Funktion v ($\Phi_{vv}(z)$) über ein System mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ übertragen, so erhält man am Ausgang das Leistungsdichtespektrum

$$\Phi_{yy}(z) = \Phi_{vv}(z) \cdot H(z) \cdot H(z^{-1})$$

Aus der AKF kann man folgendes ablesen:

- Das Quadrat des Erwartungswerts des Signals: $\mu^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{xx}(k)$
- Den quadratischen Erwartungswert: $q^2 = E(\text{Energie der Folge}) = \varphi_{xx}(0)$
- Die Varianz des Signals: $\text{Var}(x) = \sigma^2 = E \Leftrightarrow \mu^2$

3 Z-Transformation allgemein

3.1 Z-Transformierte und inverse Z-Transformierte einer Folge

3.1.1 Z-Transformierte

Die rechtsseitige Z-Transformierte $V(z)$ einer Folge $v(k)$ ist:

$$V(z) = Z\{v(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)z^{-k}$$

z ist dabei so zu wählen, dass die Reihe konvergiert. Siehe dazu auch Tabellen, z.B. Schüßler

3.1.2 Inverse Z-Transformation

$$v(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} V(z)z^{k-1} dz$$

Auswertung mit Residuensatz:

$$v(k) = \sum_{\nu} \text{Res}\{V(z)z^{k-1}\}$$

$$\text{Res}|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} V(z) \cdot (z \Leftrightarrow z_0)$$

Für Nullstellen der Ordnung > 1 siehe Bronstein S.452.

Die Rücktransformation ist nur dann eindeutig, wenn man den Konvergenzbereich kennt. oder: Partialbruchzerlegung und Rücktransformation mit Tabellen und Sätzen siehe dazu auch Beispiele im Schüßler, Gl. 2.5.29, S.92 oder Übungsaufgabe 1.18.

3.2 Bestimmung von $H(z)$ aus Angaben

- $H(2) = 0 \Rightarrow$ Nullstelle bei [Term $(z-2)$]
- weitere Nullstellen durch Linearphasigkeit (siehe) oder ähnliche Angaben

3.3 Bestimmung von $H(z)$ aus $h_0(k)$

$H(z)$ ist die Z-Transformierte von $h_0(k)$

3.3.1 $h_0(k)$ einzelne Werte

$$\begin{aligned} h_0(0) &= 0, & h_0(1) &= 4 & h_0(2) &= 3 \\ \Rightarrow h_0(k) &= 1 \cdot \gamma_0(k) + 4 \cdot \gamma_0(k \Leftrightarrow 1) + 3 \cdot \gamma_0(k \Leftrightarrow 2) \\ \Rightarrow H(z) &= 1 + 4 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} \end{aligned}$$

3.3.2 $h_0(k)$ geschlossen gegeben

$$\begin{aligned} h_0(k) &= \begin{cases} f(k) & 0 \leq k < l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow h_0(k) &= f(k) \cdot \gamma_{-1}(k) \Leftrightarrow f(k) \cdot \gamma_{-1}(k \Leftrightarrow l) \\ \Rightarrow H(z) &= F(z) \Leftrightarrow F(z) \cdot z^{-l} \end{aligned}$$

Achtung: $F(z) \circ \bullet f(k) \cdot \gamma_{-1}(k)$

3.3.3 Grad von $H(z)$

5 Werte von $h_0(k) \Rightarrow H(z)$ hat Grad 4

3.4 Impulsantwort $h_0(k)$ aus $H(z)$

Impulsantwort $h_0(k)$ ist inverse Z-Transformierte von $H(z)$

z.B. umformen von $H(z)$ durch Polynomdivision und Rücktransformation mit Verschiebungssatz:

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-4}$$

$$h_0(k) = 1\gamma_0(k) + 1\gamma_0(k \Leftrightarrow 1) + 1\gamma_0(k \Leftrightarrow 4)$$

3.5 Sprungantwort $h_{-1}(k)$ aus $H(z)$

Die Sprungantwort ist die inverse Z-Transformation von $H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$

z.B.:

$$H(z) = (1 + z^{-1} + z^{-4}) \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$h_{-1}(k) = 1\gamma_{-1}(k) + 1\gamma_{-1}(k \Leftrightarrow 1) + 1\gamma_{-1}(k \Leftrightarrow 4)$$

oder:

Aufsummieren von $h_0(k)$:

$$h_{-1}(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^k h_0(\kappa)$$

3.6 $H(z)$ aus Differenzgleichung und umgekehrt

$$c_4y(k+4) + c_3y(k+3) + c_2y(k+2) + c_1y(k+1) + c_0y(k) = \\ b_4u(k+4) + b_3u(k+3) + b_2u(k+2) + b_1u(k+1) + b_0u(k)$$

\Updownarrow

$$H(z) = \frac{b_4z^4 + b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0}{c_4z^4 + c_3z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0}$$

\Updownarrow

$$c_4y(k) + c_3y(k \Leftrightarrow 1) + c_2y(k \Leftrightarrow 2) + c_1y(k \Leftrightarrow 3) + c_0y(k \Leftrightarrow 4) = \\ b_4u(k) + b_3u(k \Leftrightarrow 1) + b_2u(k \Leftrightarrow 2) + b_1u(k \Leftrightarrow 3) + b_0u(k \Leftrightarrow 4)$$

3.7 Systemmatrizen/Zustandsdarstellung aus Übertragungsfunktion

siehe Schüßler, Netzwerke, Signale und Systeme, Bd. 2, Seite 198

3.8 $x(k), h_{-1}(k), H(z), H(z=1), Y(z)$ aus Systemmatrizen A,B,C,D

- $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k)$:
 $x(\infty) = A \cdot x(\infty) + B \cdot u(\infty)$
 $u = \gamma_0(k) \Rightarrow x(\infty) = 0$, wenn stabil
 $u = \gamma_{-1}(k) \Rightarrow u(\infty) = 1$
 $\Rightarrow x(\infty) = B[E \Leftrightarrow A]^{-1}$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{-1}(k)$:
 $u = \gamma_{-1}(k)$ gegeben
 $\Rightarrow u(\infty) = 1$
 $\Rightarrow x(\infty) = B[E \Leftrightarrow A]^{-1}$

$$y(\infty) = C \cdot x(\infty) + d \cdot u(\infty) = C \cdot [E \Leftrightarrow A]^{-1} B + D$$

$$h_{-1}(\infty) = y(\infty)|_{u=\gamma_{-1}(k)}$$

- $H(z)$ (nur für $\underline{x}(0) = \underline{0}$):
 $H(z) = C[zE \Leftrightarrow A]^{-1} B + D$
- $H(z=1)$:
 $H(z=1) = C[1 \cdot E \Leftrightarrow A]^{-1} B + D = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{-1}(k) = y(\infty)$
- $Y(z)$:

$$Y(z) = C(zE \Leftrightarrow A)^{-1} z x(0) + C(zE \Leftrightarrow A)^{-1} B U(z) + U(z)$$

3.9 Einschwing.- u. Erregeranteil

$$H(z) = \frac{\dots}{(z - z_{\infty H_1})(z - z_{\infty H_2})}$$

$$U(z) = \frac{\dots}{(z - z_{\infty U_1})(z - z_{\infty U_2})}$$

Ausgang $Y(z) = H(z) \cdot U(z)$ bestimmen, Partialbruchentwicklung von $\frac{Y(z)}{z}$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{\dots}{z \Leftrightarrow z_{\infty H_1}} + \frac{\dots}{z \Leftrightarrow z_{\infty H_2}}}_{\text{Einschwinganteil}} + \underbrace{\frac{\dots}{z \Leftrightarrow z_{\infty U_1}} + \frac{\dots}{z \Leftrightarrow z_{\infty U_2}}}_{\text{Erregeranteil}}$$

3.10 Energie von $h_0(k)$

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} |h_0(k)|^2$$

- $h_0(k)$ endlich viele Werte: ausrechnen und Quadrate summieren,
z.B. $h_0(k) = \{1, 2, 1, 2\} \Rightarrow E = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 = 10$
- $\gamma_{-1}(k) \Leftrightarrow \gamma_{-1}(k \Leftrightarrow 4) = \gamma_0(k) + \gamma_0(k \Leftrightarrow 1) + \dots + \gamma_0(k \Leftrightarrow 3) \Rightarrow E = 4$
- sonst über Summenformeln !

Energiefolge:

$$E(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^k h_0(\kappa)^2$$

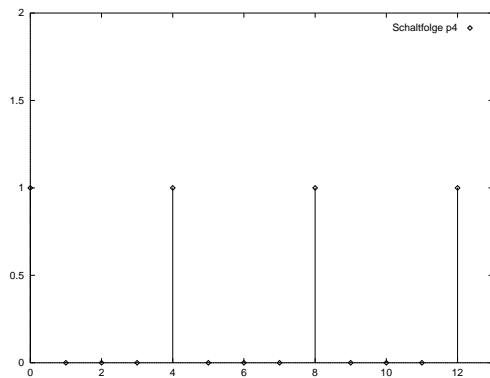
jeweils bis Zeitpunkt k aufsummieren

3.11 Schaltfolge/Unterabtastung

Schaltfolge:

$$p_r(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \lambda \cdot r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z^r}{z^r \Leftrightarrow 1}$$

Abbildung 1: Schaltfolge $p_4(k)$

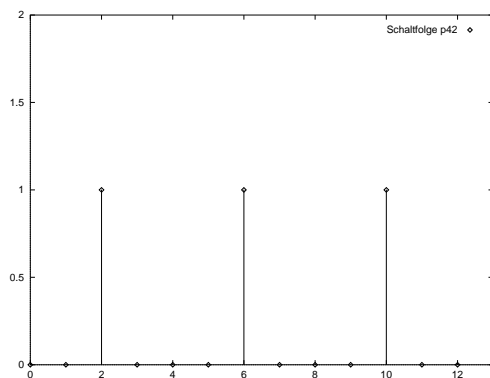
für $r=4$: (Abbildung 1)

$$p_2(k) = \frac{1}{2} \left[1 + (\Leftrightarrow 1)^k \right] \gamma_{-1}(k)$$

um ρ verschobene Schaltfolge: (Abbildung 2)

$$p_{\rho|r}(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \lambda \cdot r + \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{z^r}{z^r \Leftrightarrow 1} z^{-\rho}$$

Abbildung 2: Schaltfolge $p_4(k)$ um 2 verschoben

Unterabtastung einer Folge $v(k)$ mit der Z-Transformierten $V(z)$

$$v'(k) = v(k) \cdot p_{\rho|r}(k)$$

$$V'(z) = \frac{1}{r} \cdot \sum_{\kappa=0}^{r-1} w_r^{-\kappa\rho} \cdot V(z \cdot w_r^{-\kappa})$$

$$\text{mit } w_r = e^{-j\frac{2\pi}{r}}$$

z.B. Unterabtastung um Faktor 2, ohne Verschiebung:

$$\Rightarrow V_2(z) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^1 w_2^{\kappa} V(z(\Leftrightarrow 1)^{\kappa}) = \frac{1}{2}(V(z) + V(\Leftrightarrow z))$$

Unterabtastung (Abbildung 3): Das auf Ω normierte Spektrum wird um Faktor r gedehnt

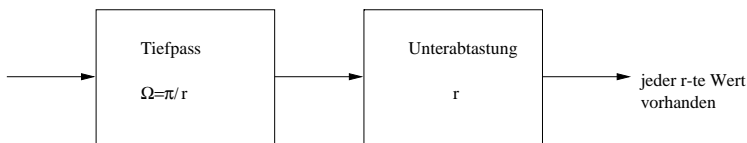


Abbildung 3: Strukturbild einer Unterabtastung

3.12 Spreizung einer Folge

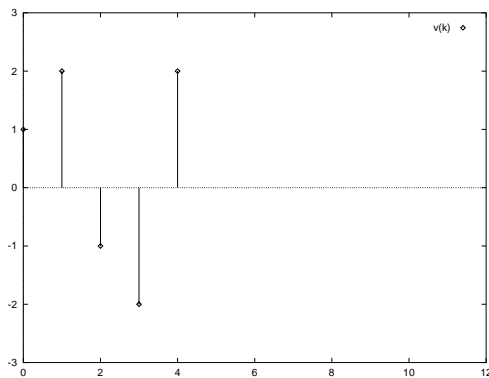


Abbildung 4: $v(k)$ vor der Spreizung

einfügen von $r-1$ Nullen $\Rightarrow z^r$ in $V(z)$ einsetzen $\Rightarrow V(z^r)$ z.B. Spreizung durch einfügen

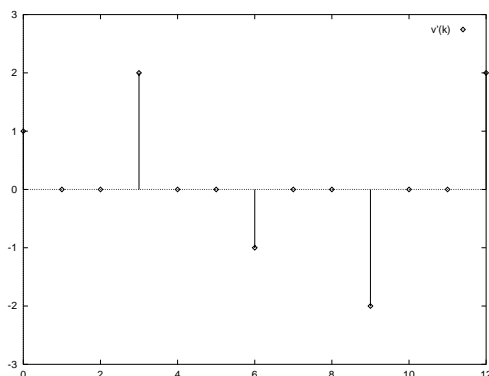


Abbildung 5: Gespreizte Funktion $v(k)$

zwei 0 \Rightarrow jeden dritten Wert behalten:

$$V(z) = \frac{z}{z \Leftrightarrow z_0} \rightarrow V'(z) = \frac{z^3}{z^3 \Leftrightarrow z_0}$$

Interpolation (Abbildung 6): Das auf Ω normierte Spektrum wird um den Faktor r gestaucht.

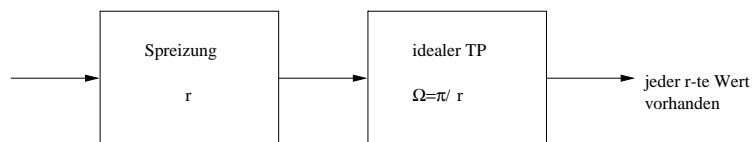


Abbildung 6: Strukturbild einer Spreizung

vgl. Girod 9-14, auch mit Polyphasen-Filterbank, Girod 9-15/16.

4 Frequenzgang $H(e^{j\Omega})$

4.1 $H(e^{j\Omega})$ aus $H(z)$

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

für $z = e^{j\Omega}$ einsetzen:

$$\text{Bsp: } H(z) = 1 + z^{-2} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = 1 + e^{-2j\Omega}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

4.2 Spiegel- oder Antispiegelpolynome

Spiegelpolynom: $\Rightarrow \cos$

$$h(k) = h(n - k)$$

$$H(z) = 2z^{-1} + 4z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

Antispiegelpolynom: $\Rightarrow \sin$

$$h(k) = -h(n - k)$$

$$H(z) = 2z^{-1} + 4z^{-2} - 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

jeweils Spiegelwert ausklammern, also hier $e^{-j2,5\Omega}$ und Rest in Klammer zusammenfassen:

$$2 \cos x = e^{jx} + e^{-jx}$$

$$2j \sin x = e^{jx} - e^{-jx}$$

Beispiel:

$$H(z) = 2 + 4z^{-1} - 4z^{-3} + 2z^{-4} \Rightarrow \text{Antispiegelpolynom}$$

$$= z^{-2} (2z^2 + 4z - 4z^{-1} + 2z^{-2}) \Rightarrow$$

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-2j\Omega} (2e^{2j\Omega} + 4e^{j\Omega} - 4e^{-j\Omega} + 2e^{-2j\Omega}) =$$

$$e^{-2j\Omega} (2 \cdot 2j \sin 2\Omega + 4 \cdot 2j \sin \Omega) = e^{-2j\Omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} (\dots) \Rightarrow$$

Phase: $b(\Omega) = 2\Omega - \frac{\pi}{2}$

Betrag: $H_0(e^{j\Omega}) = (\dots)$

Siehe auch Betrag und Phase

4.3 Betrag $|H(e^{j\Omega})|$

$$H(e^{j\Omega}) = H_0(e^{j\Omega}) \cdot e^{b(\Omega)}$$

$$|H(e^{j\Omega})|^2 = H_0^2(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{-j\Omega}) \quad (= H(z) \cdot H(z^{-1}))$$

oder:

4.3.1 Allgemein

$$H(z) = b_m \frac{\prod(z \leftrightarrow z_{o\mu})}{\prod(z \leftrightarrow z_{\infty\nu})}$$

Pole/Nullstellen $z_{o,\infty\nu} = \rho_\nu \cdot e^{j\psi_\nu}$

$$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = |b_m| \frac{\prod \sqrt{1 \leftrightarrow 2\rho_{0\nu} \cos(\Omega \leftrightarrow \psi_{0\nu}) + \rho_{0\nu}^2}}{\prod \sqrt{1 \leftrightarrow 2\rho_{\infty\nu} \cos(\Omega \leftrightarrow \psi_{\infty\nu}) + \rho_{\infty\nu}^2}}$$

4.4 Allpaß

$$H_A(z) = \frac{z \leftrightarrow a}{z \leftrightarrow \frac{1}{a}} = a \frac{z \leftrightarrow a}{az \leftrightarrow 1}$$

$$\Rightarrow |H(z)| = \text{const}$$

const aus einem bel. Wert bestimmen, z.B. $z = e^{j0} = 1$ einsetzen und Ausrechnen

4.4.1 Für einzelne Werte, z.B. zum Skizzieren

- $H(z)=f(z)$ gegeben

$$\Omega = 0, \quad \Rightarrow z = 1$$

- Ω vorgeben $\Rightarrow z = e^{j\Omega}$ bestimmen $\Omega = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow z = j$
 $\Omega = \pi, \quad \Rightarrow z = \leftrightarrow 1$

- z in $H(z)$ einsetzen $\Rightarrow H(z)=\dots=a+jb \Rightarrow |H(e^{j\Omega})| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4.5 Phase $b(\Omega)$ aus $H(e^{j\Omega})$

- $b(\Omega) = \leftrightarrow \arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}$
 $\frac{a+jb}{c+jd} \Rightarrow \leftrightarrow \arctan \frac{b}{a} + \arctan \frac{d}{c}$

- $H(e^{j\Omega})$ umformen in $e^{j\Omega}(\dots)$

- Phase bei Spiegelpolynomen: $b(\Omega) = x\Omega$ lineare Phase +evtl. Sprünge um π , wenn $H(e^{j\Omega}) < 0$.

- Phase bei Antispiegelpolynomen: $b(\Omega) = x\Omega \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$.

- Phasensprünge um π bei Ω_0 , wenn Nullstellen/Pole ungerader Vielfachheit auf Einheitskreis

- linearphasiges System: $b(\Omega) = c \cdot \Omega, \quad c = \frac{\text{Grad}}{2}$

4.5.1 Allgemein

$$b(\Omega) = \sum_{\nu} \arctan \frac{\sin \Omega \Leftrightarrow \rho_{\infty\nu} \sin \psi_{\infty\nu}}{\cos \Omega \Leftrightarrow \rho_{\infty\nu} \cos \psi_{\infty\nu}} \Leftrightarrow \sum_{\mu} \arctan \frac{\sin \Omega \Leftrightarrow \rho_{0\mu} \sin \psi_{0\mu}}{\cos \Omega \Leftrightarrow \rho_{0\mu} \cos \psi_{0\mu}} (+ \Leftrightarrow \pi \text{sign} \Omega)$$

Signumsterm entfällt für $b_m > 0$
 reeller Pol/Nullstelle ($\psi = 0$) \Rightarrow

$$b(\Omega) + \Leftrightarrow = \arctan \frac{\sin \Omega}{\cos \Omega \Leftrightarrow \rho}$$

Pol/Nullstelle bei $z=0$ ($\rho = 0$)

$$b(\Omega) + \Leftrightarrow = \Omega$$

4.5.2 Allpaß

Besitzt der Allpaß die einfachen ! Polstellen $z_{\nu} = \rho_{\nu} e^{j\psi_{\nu}}$, so tragen diese zur Phase folgendermaßen bei:

$$b_{A\nu}(\Omega) = \Leftrightarrow \Omega + 2 \arctan \frac{\sin \Omega \Leftrightarrow \rho_{\nu} \sin \psi_{\nu}}{\cos \Omega \Leftrightarrow \rho_{\nu} \cos \psi_{\nu}}$$

oder:

$$b_{A\nu}(\Omega) = \Omega + 2 \arctan \frac{\rho_{\nu} \sin(\Omega \Leftrightarrow \psi_{\nu})}{1 \Leftrightarrow \rho_{\nu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{\nu})}$$

oder:

$$b_{A\nu}(\Omega) = \psi_{\nu} + 2 \arctan \left[\frac{1 + \rho_{\nu} \tan \frac{\Omega \Leftrightarrow \psi_{\nu}}{2}}{1 \Leftrightarrow \rho_{\nu}} \right]$$

Die Phase ergibt sich dann zu:

$$b_A(\Omega) = \sum_{\nu} b_{A\nu}(\Omega)$$

4.5.3 Phase für bestimmte Werte

- $H(z)=f(z)$ gegeben

$$\begin{aligned} \Omega = 0, & \Rightarrow z = 1 \\ \Omega = \frac{\pi}{4}, & \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j) \\ \Omega = \frac{\pi}{2}, & \Rightarrow z = j \\ \Omega = \pi, & \Rightarrow z = \Leftrightarrow 1 \\ \Omega = \frac{3\pi}{2}, & \Rightarrow z = \Leftrightarrow j \end{aligned}$$

- Ω vorgeben $\Rightarrow z = e^{j\Omega}$ bestimmen

- z in $H(z)$ einsetzen $\Rightarrow H(z)=\dots=a+jb \Rightarrow b(\Omega) = \Leftrightarrow \arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}$

- Spezielle Werte:

$$\begin{aligned} H(z) = 1 & = 1e^{j0} \Rightarrow b = 0 \\ H(z) = \Leftrightarrow 1 & = 1e^{j\pi} \Rightarrow b = \pi \\ H(z) = j & = 1e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} \\ H(z) = \Leftrightarrow j & = 1e^{j\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow b = \frac{3\pi}{2} \\ H(z) = a + jd & \Rightarrow b = \Leftrightarrow \arctan \frac{d}{a} \\ H(z) = \frac{a+jd}{e+jf} & \Rightarrow b = \Leftrightarrow \arctan \frac{d}{a} + \arctan \frac{f}{e} \end{aligned}$$

4.6 Gruppenlaufzeit $\tau_g(\Omega)$

$$\tau_g(\Omega) = \frac{db(\Omega)}{d\Omega}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}$$

$$(xy)' = x'y + xy'$$

$$H(e^{j\Omega}) = P(e^{j\Omega}) + jQ(e^{j\Omega})$$

$$\tau_g(\Omega) = \frac{\Re\{Q'(e^{j\Omega})P(e^{j\Omega}) + P'(e^{j\Omega})Q(e^{j\Omega})\}}{P^2(e^{j\Omega}) + Q^2(e^{j\Omega})}$$

Zusammenhang mit $h_0(k)$:

$$\tau_g(\Omega) = \Re \left\{ \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} k h_0(k) e^{-jk\Omega}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} h_0(k) e^{-jk\Omega}} \right\}$$

4.6.1 Gruppenlaufzeit allgemein

$$\tau_g(\Omega) = \sum_{\nu} \frac{1 \Leftrightarrow \rho_{\infty\nu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{\infty\nu})}{1 \Leftrightarrow 2\rho_{\infty\nu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{\infty\nu}) + \rho_{\infty\nu}^2} \Leftrightarrow \sum_{\mu} \frac{1 \Leftrightarrow \rho_{0\mu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{0\mu})}{1 \Leftrightarrow 2\rho_{0\mu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{0\mu}) + \rho_{0\mu}^2},$$

\forall Pole und Nullstellen

Pol im Ursprung:	$\tau_g + =$	1
Nullstelle im Ursprung:	$\tau_g + =$	$\Leftrightarrow 1$
Nullstelle auf EK:	$\tau_g + =$	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}$

4.6.2 Gruppenlaufzeit eines Allpasses

$$\tau_{gA}(\Omega) = \sum_{\nu=1}^n \frac{1 \Leftrightarrow \rho_{\infty\nu}^2}{1 \Leftrightarrow 2\rho_{\infty\nu} \cos(\Omega \Leftrightarrow \psi_{\infty\nu}) + \rho_{\infty\nu}^2},$$

aus Polen $z_{\infty\nu} = \rho_{\infty\nu} e^{j\psi_{\infty\nu}}$ bestimmbar.

4.7 Cepstrum

vgl DigSi-Übung Anfang II

$$\Leftrightarrow \ln H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_p(k) z^{-k}$$

$c_p(k)$...Cepstrum. Mit dem Cepstrum kann man relativ leicht $a(\Omega)$, $b(\Omega)$ und $\tau(\Omega)$ bestimmen. Das Cepstrum errechnet sich dabei aus $H(z)$ wie folgt: (noch zu prüfen)

$$H(z) = \frac{\prod_{\mu} (z \Leftrightarrow z_{0\mu})}{\prod_{\nu} (z \Leftrightarrow z_{\infty\nu})}$$

$$c_p(k) = \frac{1}{k} \left(\sum_{\mu} z_{0\mu}^k \Leftrightarrow \sum_{\nu} z_{\infty\nu}^k \right) \gamma_{-1}(k \Leftrightarrow 1)$$

$$c_p(0) = 0$$

damit folgt:

$$a(\Omega) + jb(\Omega) = \Leftrightarrow \ln H(e^{j\Omega})$$

$$a(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c_p(k) \cos k\Omega$$

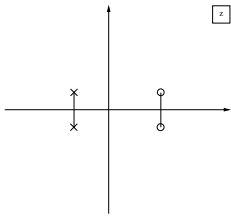
$$b(\Omega) = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_p(k) \sin k\Omega$$

$$\tau(\Omega) = \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_p(k) \cos k\Omega$$

5 Systemeigenschaften aus PN

5.1 Reelwertig

Reelwertig \Leftrightarrow Pole Symmetrisch, Nullstellen Symmetrisch.



5.2 Kausal

Kausal \Leftrightarrow Grad Zähler \leq Grad Nenner

$\Rightarrow H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$, wenn
 $H(z) = \underbrace{z^2 + z}_{\text{nicht kausale Anteile}} + 1 + z^{-1} + \dots$

5.3 Umwandeln eines Systems in ein kausales System

Pole mit $z=0$ ergänzen, z.B.:

$$H_{\text{nicht kausal}}(z) = \frac{z^3 \Leftrightarrow 1}{z \Leftrightarrow 1}$$

$$H_{\text{kausal}}(z) = \frac{z^3 \Leftrightarrow 1}{z^2(z \Leftrightarrow 1)}$$

Grad Zähler=Grad Nenner. Multiplikation mit z^{-2} entspricht Verzögerung, bis kausal

5.4 Stabilität

- Alle Pole im Einheitskreis, also $|z_{\infty\nu}| < 1$

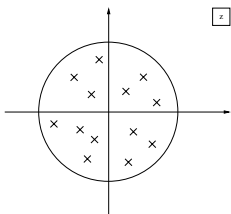


Abbildung 7: PN eines stabilen Systems

- bedingt stabil, wenn einfache Pole auf Einheitskreis
- nicht rekursives System \Rightarrow immer stabil !
- Stabilitätstests: Schur-Cohn-Test, Transformation ins Kontinuierliche und Hurwitz/Ruth-Test

- Nenner vom Grad 2 \Rightarrow Stabilitätsdreieck
- Sprungantwort absolut summierbar

5.4.1 Stabilität bei einem System 2.Grades

$$H(z) = \frac{P(z)}{z^2 + c_1z + c_0}$$

Nenner untersuchen. Stabil, wenn

$$\begin{aligned} |c_0| &< 1 \\ |c_1| &< 1 + c_0 \end{aligned}$$

siehe auch Abbildung 8

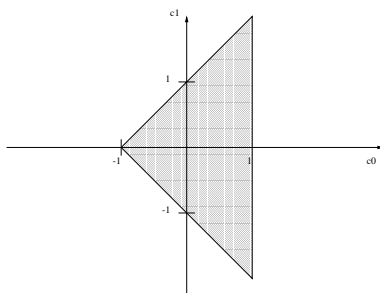


Abbildung 8: Stabilitätsdreieck

5.4.2 Stabilität mit dem Schur-Cohn-Test

- alle Koeffizienten $|r| < 1 \Leftrightarrow$ stabil
 mind. 1 Koeff. $|r| > 1 \Leftrightarrow$ instabil Schur-Cohn-Test:
 mind. 1 Koeff. $|r| = 1 \Leftrightarrow$ instabil oder bedingt stabil

$$H(z) = \frac{\dots}{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} \underline{c_n} & c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 & \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & c_n & \cdot \left(\Leftrightarrow \frac{c_0}{c_n} \right) = \Leftrightarrow r^{(n)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} \underline{c_{n-1}^{(n-1)}} & c_{n-2}^{(n-1)} & \dots & c_0 & 0 & \\ c_0^{(n-1)} & c_1^{(n-1)} & \dots & c_{n-1}^{(n-1)} & & \cdot \left(\Leftrightarrow \frac{c_0^{(n-1)}}{c_n^{(n-1)}} \right) \end{array}$$

...

stabil: unterstrichene (führende) Koeffizienten > 0 , oder alle $r_\nu < 1$

5.4.3 Stabilisieren eines Systems

Bsp:

$$H_1(z) = \frac{P(z)}{(z \leftrightarrow 2)(z \leftrightarrow 3)}$$

instabil, da Pole bei 2 und 3

$$H_{stabil}(z) = H_1(z) \cdot Const \cdot H_{Allpass}(z)$$

mit

$$H_{Allpass}(z) = \frac{(z \leftrightarrow 2)(z \leftrightarrow 3)}{(z \leftrightarrow \frac{1}{2})(z \leftrightarrow \frac{1}{3})}$$

Const bestimmen aus $H_1(1) = H_{stabil}(1)$. Dann folgt

$$|H_1(e^{j\Omega})| = |H_{stabil}(e^{j\Omega})|$$

5.5 Linearphasig

siehe Steffen S.339f

1. alle Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis oder Nullstellen gerader Vielfachheit auf Einheitskreis (a und $\frac{1}{a}$) bzw (ja und $j\frac{1}{a}$), z_0 und $\frac{1}{z_0^*}$

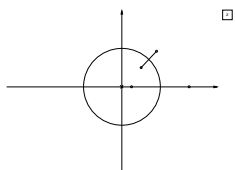


Abbildung 9: PN eines linearphasigen Systems

2. nur Polstellen im Ursprung $z_\infty = 0$
Bild
3. symmetrische Impulsantwort \Rightarrow linearphasig, nicht umgekehrt.
4. Symmetrie: $H_0(e^{j\Omega}) = H_0(e^{-j\Omega})$ reell und gerade
5. Antisymmetrie: $H_0(e^{j\Omega}) = \Leftrightarrow H_0(e^{-j\Omega}) = H_0^*(e^{j\Omega})$ reell und ungerade. $H(e^{j\Omega}) = j \cdot H_0(e^{j\Omega})e^{j\Omega}$
6. Bestimmung eines linearphasigen Systems:
gegeben $H_1(z) \Rightarrow H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$. $H(z)$ ist dann linearphasig, wenn

$$H_2(z) = z^{-N} H_1(z^{-1}) \cdot k$$

also wenn die neuen Nullstellen bzgl des EK spiegelbildlich liegen

- Zähler und Nenner: Spiegel bzw. Antispiegelpolynome
- Multiplikation mit Polynom mit vertauschten Koeffizienten

5.6 Rekursiv/nicht Rekursiv

Rekursiv: Polstellen nicht im Ursprung. (Allpaß ist immer rekursiv)

Nicht rekursiv: alle Polstellen im Ursprung \Rightarrow System ist dann immer stabil \Leftrightarrow Impulsantwort hat endliche Länge.

5.7 Allpass

- stabil und reellwertig

$$H_A(z) = \frac{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}{a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

- Pole und Nullstellen spiegelbildlich zum Einheitskreis.

Pol: $z = z_\infty$, Nullstelle: $z_0 = \frac{1}{z_\infty^*}$

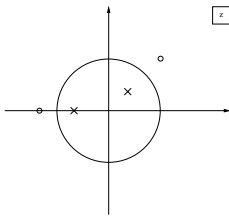


Abbildung 10: PN eines Allpasses

- Übertragungsfunktion:

$$H_A(z) = \frac{P(z)}{N(z)} = \frac{(\Leftrightarrow z)^n \cdot N(z^{-1})}{N(z)}$$

allgemein:

$$H_A(z) = \frac{\prod_{\nu} (z \cdot z_{\infty \nu} \Leftrightarrow 1)}{\prod_{\nu} (z \Leftrightarrow z_{\infty \nu})}$$

$$|H_A(e^{j\Omega})| = \text{const} \Rightarrow$$

$$H(z) = H_A(z) \cdot H_1(z)$$

$$|H(e^{j\Omega})| = |H_1(e^{j\Omega})|$$

5.8 Minimal-/Maximalphasig

Minimalphasig: Alle Nullstellen im oder auf Einheitskreis: $|z_0| \leq 1$

Maximalphasig: Alle Nullstellen außerhalb Einheitskreis, oder auf dem EK: $|z_0| \geq 1$

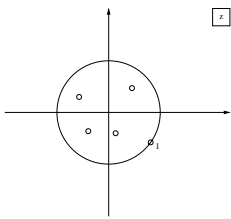


Abbildung 11: PN eines minimalphasigen Systems

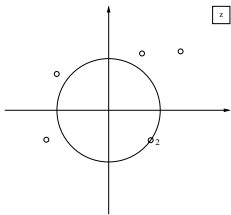


Abbildung 12: PN eines maximalphasigen Systems

5.9 Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß, Bandsperre, Allpaß

- Tiefpaß: Bild PN, Bild Frequenzgang
- Hochpaß: Pole im EK, Nullstellen auf EK oder außerhalb. Pole und Nullstellen in rechter z-HE Bild PN, Bild Frequenzgang
- Bandsperre: Bild PN, Bild Frequenzgang
- Bandpaß: Pole im EK, NS auf Einheitskreis. Verbindungslinie Pol-NS verläuft durch Ursprung Bild PN, Bild Frequenzgang
- Allpaß: Pole und Nullstellen spiegelbildlich zum EK
Bild PN, Bild Frequenzgang
- $z_{\infty\nu} = 0 \Rightarrow z_{0\nu} = \infty$

6 Realisierung/Prony

$g_{Wunsch}(k)$ vorgegeben $\Rightarrow h_0(k)$ gesucht. Vorgaben im Zeitbereich Prony-Verfahren. siehe auch Hilfsblatt zur Vorlesung vom 5.2.96, Nr.4, Digitale Signalverarbeitung II, S.59 ff

1. K bestimmen

$$g(k) = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}, \text{ also 7 Elemente, } \Rightarrow K=6$$

2. m und n bestimmen:

$$K+1 = m+n+1$$

$$\text{z.B. } m=n=3$$

$$H(z) = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0}$$

Gleichungssysteme:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_4 & g_3 & g_2 & g_1 \\ g_5 & g_4 & g_3 & g_2 \\ g_6 & g_5 & g_4 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 & 0 \\ g_3 & g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

3. c_ν bestimmen, Matrix invertieren / Gleichungssystem 1 lösen
4. b_ν bestimmen, Gleichungssystem 2 lösen
5. $H(z)$ in $h_0(k)$ umformen, z.B mit Partialbruchentwicklung etc
z.B. $m=n=2$

$$H(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + c_1 z + c_0}$$

Gleichungssysteme:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3 & g_2 & g_1 \\ g_4 & g_3 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

7 Nichtrekursive Systeme

7.1 H(z) aus $H_0(e^{j\Omega})$

$$\begin{aligned}
 & \text{z.B. } H_0(e^{j\Omega}) = \cos 5\Omega \text{ gegeben} \\
 & = \frac{1}{2} (e^{-j5\Omega} + e^{+j5\Omega}) \\
 & \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = e^{jb(\Omega)} \cdot H_0(e^{j\Omega}) = \\
 & = e^{-j5\Omega} \frac{1}{2} (e^{-j5\Omega} + e^{+j5\Omega}) = \frac{1}{2} e^{-j10\Omega} + \frac{1}{2} \cdot 1 \\
 & \Rightarrow H(z) = \frac{1}{2} z^{-10} + \frac{1}{2} z^0 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{10}}{z^{10}} \\
 & \Rightarrow h_0(k) = \frac{1}{2} \gamma_0(k) + \frac{1}{2} \gamma_0(k \Leftrightarrow 10)
 \end{aligned}$$

7.2 H(z) aus Werten für $H_0(e^{j\Omega})$

7.3 Fourier-Reihenentwicklung (linearer Phase)

$$\begin{aligned}
 H_{Wunsch}(e^{j\Omega}) &= f(\Omega) \\
 H &= f(\Omega), \quad h_w(k) = h_w(\Leftrightarrow k), \text{ Spiegelpolynom}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow b_\mu &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H_0(e^{j\Omega}) \cos \mu\Omega d\Omega \\
 b_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H_0(e^{j\Omega}) d\Omega
 \end{aligned}$$

b_μ : Integral lösen, Bronstein S.54

$$H = jf(\Omega), \quad h_w(k) = \Leftrightarrow h_w(\Leftrightarrow k), \text{ Antispiegelpolynom}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow b_\mu &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H_0(e^{j\Omega}) \sin \mu\Omega d\Omega \\
 b_0 &= 0
 \end{aligned}$$

b_μ : Integral lösen, Bronstein S.52

$$h_W(\mu) = b_\mu h_0(k) = \begin{cases} h_w(k \Leftrightarrow \frac{n}{2}) & 0(1)n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{n...Grad des Systems}$$

7.4 Fourierapproximation

Toleranzschema erfüllbar, wenn $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0,09$ (bezogen auf Sprunghöhe, sonst Gibb-sches Überschwingen).

Fourierapproximation = Fourierreihe b_μ · Rechteckfenster, entspricht Abschneiden.

N steigt: $\Delta\Omega$ sinkt, δ bleibt.

7.5 Kaiserfenster

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, bezogen auf Sprunghöhe

Maximalwert der geforderten Dämpfung:

$$a = \Leftrightarrow 20 \lg \delta \quad [\text{db}]$$

Gütefaktor D:

$$D_{Kaiser} = \frac{a \Leftrightarrow 7,95}{14,36}$$

$$\Delta\Omega = \Omega_S \Leftrightarrow \Omega_D$$

$$N_K = \left\lceil \frac{\pi D_K}{\Delta\Omega} \right\rceil$$

Filtergrad n:

$$n_K = 2 \cdot N_K$$

Entwurf mit Kaiserfenster: $\delta_1 = \delta_2$

Parameter α des Kaiserfensters:

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(a \Leftrightarrow 8,7) & \text{für } a > 50 \text{ db} \\ 0,5842(a \Leftrightarrow 21)^{0,4} + 0,07886(a \Leftrightarrow 21) & \text{für } 21 < a < 50 \text{ db} \end{cases}$$

7.5.1 Koeffizienten mit Kaiser

$h_{0w}(\mu)$ bestimmen (Fourierkoeffizienten wie bei Fourier-Approximation)

$$h_0(k) = h_{ow}(k \Leftrightarrow N_K) \cdot f_k(k \Leftrightarrow N_K)$$

gesucht.

$$f_K(\mu) = \frac{I_0\left(\alpha \sqrt{1 \Leftrightarrow \frac{\mu^2}{N_K^2}}\right)}{I_0(\alpha)}$$

I_0 siehe Übungsbuch S.88

N steigt $\Rightarrow \Delta\Omega, \delta$ werden kleiner. Zu speichern sind N+1 Koeffizienten

7.6 Tschebyscheff

$$a_1 = 0,005309$$

$$a_2 = 0,07114$$

$$a_3 = \Leftrightarrow 0,4761$$

$$a_4 = \Leftrightarrow 0,00266$$

$$a_5 = \Leftrightarrow 0,5941$$

$$a_6 = \Leftrightarrow 0,4278$$

Gütefaktor:

$$D_T = (a_1 l g^2 \delta_1 + a_2 l g \delta_1 + a_3) l g \delta_2 + a_4 l g^2 \delta_1 + a_5 l g \delta_1 + a_6$$

$$D_T = \frac{\Leftrightarrow 20 l g \sqrt{\text{delta}_1 \delta_2} \Leftrightarrow 13}{14,6}$$

(schlechter)

$$\Delta\Omega = \Omega_S \Leftrightarrow \Omega_D$$

$$N_T = \left\lceil \frac{\pi D_T}{\Delta\Omega} \right\rceil$$

Filtergrad $n_T = 2 \cdot N_T$

Lösung mit Remez-Austauschalgorithmus

Zu speichernde Koeffizienten: $N+1$

7.7 Minimalphasiges System

$H_{Minimal}(e^{j\Omega})$ umrechnen in $\tilde{H}_0(e^{j\Omega})$ linearphasig:

$$C^2 = 1 + \delta_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \delta_2^2$$

$$\tilde{\Omega}_D = \Omega_D$$

$$\tilde{\Omega}_S = \Omega_S$$

$$\tilde{\delta}_1 = \frac{4\delta_1}{2C^2}$$

$$\tilde{\delta}_2 = \frac{\delta_2^2}{2C^2}$$

weiterer Entwurf z.B. mit Tschebyscheff $\Rightarrow D_{TM}, N_{TM} \ n_{TM} = N_{TM}$. TP \rightarrow minimalphasiger TP, siehe Klausur Oktober 94/6b

7.8 TP/HP/BP-Transformation

Übungsaufgabe 6.9

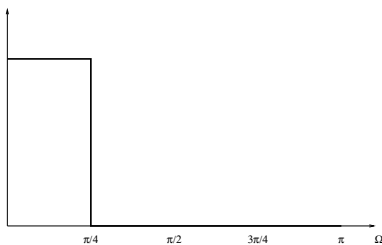


Abbildung 13: Tiefpaß

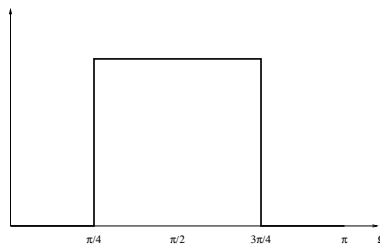


Abbildung 14: Bandpaß

$$\begin{aligned} H_{TP}(e^{j\Omega}) &= b_0 + 2 \sum b_\nu \cos \\ H_{HP1}(e^{j\Omega}) &= H_{TP}(e^{j(\Omega+\pi)}) = b_0 + 2 \sum (\Leftrightarrow 1)^\nu b_\nu \cos \\ H_{HP2}(e^{j\Omega}) &= 1 \Leftrightarrow H_{TP}(e^{j\Omega}) = (1 \Leftrightarrow b_0) + 2 \sum \Leftrightarrow b_\nu \cos \\ H_{BP}(e^{j\Omega}) &= H_{HP1}(e^{j2\Omega}) = b_0 + 2 \sum (\Leftrightarrow 1)^\nu b_\nu \cos 2 \end{aligned}$$

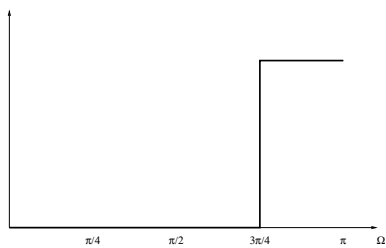


Abbildung 15: Hochpaß 1

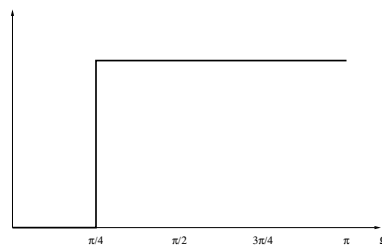


Abbildung 16: Hochpaß 2

$H(z) \rightarrow H(-z)$: TP \rightarrow HP

$H(z) \rightarrow H(z^2)$: TP \rightarrow BP, 2x gestaucht

7.9 Grade

N: Grad der Fourierapproximation

N+1: Zahl der cos-terme bei Fourier bzw Tschebyscheff-Approximation

2N+1: Länge der Impulsantworten (Zahl der e-Funktionen bei Fourier)

n=2N: Grad der Übertragungsfunktion H(z)

zu speichernde Koeffizienten: N+1

Anzahl Multiplizierer: 2.kanonische Form: 2N+1

Sprenzung des Frequenzgangs \Rightarrow Gradverdopplung

7.10 Frequenzen

$f_A \Leftrightarrow f_S \geq f_{max}$

8 Rekursive Systeme

8.1 Allgemeines Vorgehen

1. $\Omega_s, \Omega_D, \delta_S, \delta_D$ bestimmen (Toleranzschema)
2. z -Bereich in w -Bereich transformieren:
 $w = \frac{z-1}{z+1}, \eta = \tan \frac{\Omega}{2}$
 z -Bereich: periodisch, w -Bereich: nur 1xBasisband
3. normierter TP
 Skizze

$$w' = \frac{w}{\eta_D}, \eta' = \frac{\eta}{\eta_D}$$

4. charakteristische Funktion $C \cdot |K(j\eta)|$ bestimmen, Δ_1, Δ_2 bestimmen
5. in Toleranzschema für charakteristische Funktion
 - TP mit Potenzverhalten $|K(j\eta)|^2 = (\eta')^{2n}$
 - TP mit Tschebyscheff im DB
 - TP mit Tschebyscheff im SB
 - Cauer-Filter

siehe Script II, S.40 Verlauf der Filter

6. Rücktransformation

$$H(z) = G\left(\frac{z \leftrightarrow 1}{z+1}\right)$$

Nullstellen, Pole: $z_\nu = \leftrightarrow \frac{w_\nu+1}{w_\nu-1}$ mit

$$|G(j\eta')|^2 = \frac{1}{1 + C^2 |K(j\eta')|^2}$$

$$G(w) = \frac{1}{1 + aw + bw^2}$$

$$|G(w)|^2 = G(w)G(\leftrightarrow w) = \frac{1}{1 + \underbrace{(2b \leftrightarrow a^2)w^2 + b^2w^4}_{|\bar{K}(w)|^2}}$$

8.2 Umrechnung Toleranzschemata

Toleranzschemata, siehe S.32/40 (Rekursiv), S.4 (Nichtrekursiv) in DigSi II

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{\delta_D}{2} \Leftrightarrow \delta_D \\ \delta_2 &= \frac{2\delta_S}{2} \Leftrightarrow \delta_D \\ \delta_D &= \frac{2\delta_1}{1 + \delta_1} \\ \delta_S &= \delta_2 \Leftrightarrow \frac{\delta_2 \cdot \delta_D}{2} \\ \delta_D = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta_1^2}} \\ \delta_S &= \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta_2^2}} \\ \Delta_1 &= \frac{\sqrt{2\delta_D \Leftrightarrow \delta_D^2}}{1 \Leftrightarrow \delta_D} \\ \Delta_2 &= \frac{\sqrt{1 \Leftrightarrow \delta_S^2}}{\delta_S}\end{aligned}$$

8.3 Toleranzen bei Zusammenschaltungen

1. Serienschaltung

$$\begin{aligned}\text{max.} \quad 1 + \tilde{\delta}_1 &= (1 + \delta_{1a})(1 + \delta_{1b}) \\ \text{min.} \quad 1 \Leftrightarrow \tilde{\delta}_1 &= (1 \Leftrightarrow \delta_{1a})(1 \Leftrightarrow \delta_{1b}) \\ \tilde{\delta}_2 &= \delta_{2a} \delta_{2b}\end{aligned}$$

2. Parallelschaltung

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_1 &= \delta_1 + \delta_2 \\ \tilde{\delta}_2 &= \delta_2 + \delta_2\end{aligned}$$

8.4 Toleranzen beim Entwurf minimalphasiger FIR Filter

- Toleranzschemen

$$\begin{aligned}\text{mit} \quad \alpha^2 &= 1 + \delta_1^2 \Leftrightarrow \frac{\delta_2^2}{2} \\ \Rightarrow \quad \tilde{\delta}_1 &= \frac{2\delta_1}{\alpha^2} \\ \tilde{\delta}_2 &= \frac{\delta_2^2}{2\alpha^2} \\ \tilde{\Omega}_{S/D} &= \Omega_{S/D}\end{aligned}$$

8.5 Bilineare Transformation (TP)

gegeben: $\delta_D, \delta_S, \Omega_D, \Omega_S$

- w-Bereich: $\Omega \rightarrow \eta$ -Bereich

$$\eta_D = \tan \frac{\Omega_D}{2}$$

$$\eta_S = \tan \frac{\Omega_S}{2}$$

$$\eta = \tan \frac{\Omega}{2}$$

- w'-Bereich: $\eta'_D = 1$

$$\eta'_D = \frac{\eta_D}{\eta_D} = 1$$

$$\eta'_S = \frac{\eta_S}{\eta_D} > 1$$

$$\eta' = \frac{\eta}{\eta_D}$$

$$w = \frac{z \Leftrightarrow 1}{z + 1}$$

$$z = \frac{1 + w}{1 \Leftrightarrow w}$$

$$G(w) = H\left(z = \frac{1 + w}{1 \Leftrightarrow w}\right)$$

$$H(z) = G\left(w = \frac{z \Leftrightarrow 1}{z + 1}\right)$$

für normierten TP, normierter HP, BP siehe Script II, S.34 oben

8.6 Potenzverhalten

Ansatz: $|\tilde{K}(j\eta')|^2 = (\eta')^{2n}$

Bestimmung von C, n:

- allgemein

$$C \leq \Delta_1$$

$$C(\eta'_s)^n \geq \Delta_2$$

- Wahl:

$$C = \Delta_1$$

$$n = \left\lceil \frac{\lg(\Delta_2/\Delta_1)}{\lg \eta'_s} \right\rceil$$

n...Grad des Filters

8.7 Tschebyscheff DB

- Ansatz
 $|\tilde{K}(j\eta')|^2 = T_n^2(\eta')$
 mit $T_n(\eta') = \begin{cases} T_1(x) & = x \\ T_2(x) & = 2x^2 \Leftrightarrow 1 \\ T_3(x) & = 4x^3 \Leftrightarrow 3x \\ T_4(x) & = 8x^4 \Leftrightarrow 8x^2 + 1 \\ \text{usw} & \end{cases}$
- Bestimmung von C,n
 $C \leq \Delta_1$
 $C \cdot T_n(\eta'_S) \geq \Delta_2$
- Wahl:
 $C = \Delta_1$
 $n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)}{\operatorname{arccosh}\eta'_S} \right\rceil$

8.8 Tschebyscheff SB

- Ansatz $|\tilde{K}(j\eta')|^2 = T_n^{-2}\left(\frac{\eta'_S}{\eta'}\right)$
- Bestimmung von C,n $C \geq \Delta_2$ $C \cdot T_n^{-1}(\eta'_S) \leq \Delta_1$
- Wahl:
 $C = \Delta_2$
 $n = \left\lceil \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)}{\operatorname{arccosh}\eta'_S} \right\rceil$

8.9 Cauerfilter

- Ansatz $|\tilde{K}(j\eta')|^2 = \text{S.39 oben}$
- Bestimmung von C,n
 $C \leq \Delta_1 \Delta^{-1}$
 $C \geq \Delta_2 \Delta$
 $\Delta = \dots \text{S.39 oben}$
- Wahl:
 $C = \Delta_1 \Delta^{-1}$
 $n = \lceil \dots 5.2.65 \rceil$

8.10 Bestimmung von C, falls Grad n gegeben

siehe Vorschriften für C, z.B für Potenzverhalten: $C \leq \Delta_1$

$$C(\eta'_S)^n \geq \Delta_2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_2}{(\eta'_S)^n} \leq C \leq \Delta_1$$

8.11 Bestimmung von Δ_1, Δ_2 , wenn C und \tilde{K} gegeben

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= C \cdot \tilde{K}(j\eta'_D = j1) \\ \Delta_2 &= C \cdot \tilde{K}(j\eta'_S)\end{aligned}$$

8.12 Berechnung Toleranzschema $H(e^{j\Omega})$ aus \tilde{K}

gegeben: $\Delta_1, \Delta_2, \eta'_D = 1, \eta'_S$

gesucht: $\Omega = 2 \cdot \arctan \eta'$, für S,D berechnen δ_D, δ_S mit Formeln auf S. 33

8.13 Abtastfrequenz

$f_A \geq f_S + f_{max}$ mit f_A = Abtastfrequenz f_S = Frequenz, an der der Sperrbereich beginnt

f_{max} = maximale Signalfrequenz \Rightarrow Normierung von Ω :

$$\Omega = 2\pi \frac{f}{f_A}$$

$\Rightarrow \Omega_D, \Omega_S$ bestimmen, wenn f_D, f_S angegeben

9 Rauschzahlen

9.1 Rauschzahlen

R_e vom Eingang zum Ausgang R_i innere Rauschzahl, von Rundung zum Ausgang $H(z)$ Übertragungsfunktion vom Rauschort zum Ausgang

$$R = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) \cdot H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

Lösungen für Standardfälle \Rightarrow im Kapitel Standardfälle

9.2 Gesamtstörleistung

am Ausgang

$$N = \frac{Q^2}{12} \{R_e + R_i + \dots\}$$

9.3 Berechnung des Residuums

$H(z) \cdot H(z^{-1})$ berechnen, Pole von $H(z)$ bestimmen, nicht von $H(z^{-1})$, Pole zur Berechnung der entsprechenden Residuen zuhalten und Polwert in übrige Gleichung einsetzen. Bei mehrfachen Polen nach Bronstein, S.527 (3.90) vorgehen

9.4 Aufstellen von $H(z)$

- Eingangssignal $v(k)$ weglassen !
- neues Eingangssignal $v(k)$ bei Rauschquelle einfügen
- Übertragungsfunktion aufstellen, z.B. als Differenzgleichung. Eventuell Zwischenübertragungsfunktionen bei komplizierten Systemen einführen, z.B. Klausur April 1991/6. Möglichst mit kanonischen Formen oder Kopplung von Systemen arbeiten, geht am schnellsten

eventuell noch Skizzen einfügen

9.5 Standardfälle

9.5.1 System 1.Ordnung

Skizze $H(z) = \frac{1}{z-a}$

Skizze $H(z) = \frac{z}{z-a}$

$\Rightarrow R_i = \frac{1}{1-a^2}$

9.5.2 System 2.Ordnung

1. kanonische Form:

$$H(z) = a \frac{1}{z^2 + c_1 z + c_0}$$

$$H(z) = a \frac{z}{z^2 + c_1 z + c_0}$$

$$H(z) = a \frac{z^2}{z^2 + c_1 z + c_0}$$

$$R_{e,i} = a^2 \frac{1+c_0}{(1-c_0)[(1+c_0)^2 - c_1^2]}$$

max: $c_1^2 = 4c_0$, min $c_1 = 0$, vgl. S.103

9.6 Anmerkungen

$H_1(z) = H(z)$; $H_2(z) = z \cdot H(z) \Rightarrow R_{i1} = R_{i2}$, da sich z s wegekürzen

9.7 Auswirkung von Faktoren

Faktoren gehen quadratisch in die Rauschzahl ein.

9.8 Zusammenhang zwischen Energie und Rauschzahl

Energie der Impulsantwort = Rauschzahl R_e

9.9 Zusätzliche Wortlänge

$$\Delta w = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{R_i}{R_e + 1} \right]$$

Index

- Abtastfrequenz
 - TP, 36
- Abtasttheorem, 7
- Additionstheoreme, 6
- AKF, 10
- Allpaß, 25, 26
 - Betragsfrequenzgang, 18
 - Gruppenlaufzeit, 20
 - Phase, 19
- Anteil
 - gerader, 4
 - ungerader, 4
- Antispiegelpolynom, 17
- arccosh, 6
- Ausgangsfunktion
 - aus Systemmatrizen, 13
- Bandpaß, 26
- Bandsperre, 26
- Betragsfrequenzgang, 18
 - Allgemein, 18
 - Allpaß, 18
 - einzelne Werte, 18
- Bilineare Transformation, 34
- C, 35
 - Cauerfilter, 35
 - Potenzverhalten, 34
 - Tschebyscheff DB, 35
 - Tschebyscheff SB, 35
- Cauerfilter, 35
- Cepstrum, 21
- DFT, 5, 7
 - gerade, ungerade Folgen, 7
 - Impulsantwort, 9
 - Lineare Faltung, 8
 - Spektrale Auflösung, 7
 - Symmetrien, 7
 - Tabellen, 9
 - zyklische Faltung, 8
 - Zyklische Verschiebung, 8
- Differenzgleichung, 12
- Einschwinganteil, 13
- Energie, 13
- Energiefolge, 13
- Erregeranteil, 13
- Erwartungswert, 10
 - quadratischer, 10
- Faltung, 4
 - zyklische, 5
- Fourier-Transformierte, 5
 - inverse, 5
- Fourierapproximation, 28
- Frequenzgang, 17
- Gütefaktor
 - Kaiser, 29
 - Tschebyscheff, 30
- Geometrische Reihe, 6
- Gesamtstörleistung, 37
- Grad
 - von $H(z)$, 12
- Grade, 31
- Gruppenlaufzeit, 20
 - allgemein, 20
 - Allpaß, 20
- $H(z)$
 - aus Angaben, 11
 - aus Differenzgleichung, 12
 - aus $h_0(k)$, 11
 - aus Systemmatrizen, 13
 - Grad, 12
- Hochpaß, 26
- Impulsantwort
 - aus $H(z)$, 12
 - DFT, 9
- Interpolation, 16
- Kaiserfenster, 28
- kausal, 22
- ld, 6
- Leistungsdichtespektrum, 10
- Lineare Faltung
 - mit DFT, 8
- Linearphasig, 24
- Maximalphasig, 25
- Minimalphasig, 25
- Minimalphasige Filter, 30

- Toleranzen, 33
- Toleranzenumrechnungen, 33
- n
 - Cauerfilter, 35
 - Potenzverhalten, 34
 - Tschebyscheff DB, 35
 - Tschebyscheff SB, 35
- Normen, 4
- Parallelschaltung, 33
- Parseval, 5
- Phase, 18
 - allgemein, 19
 - Allpaß, 19
 - best. Werte, 19
- Potenzverhalten, 34
- Prony, 27
- Rauschzahlen, 37
 - Standardfälle, 37
- Realisierung, 27
- reelwertig, 22
- Reihe
 - gemoetrische, 6
- rekursiv/nicht rekursiv, 25
- Residuum, 37
- Schaltfolge, 13
- Schur-Cohn-Test, 23
- Serienschaltung, 33
- Spektrale Auflösung
 - der DFT, 7
- Spiegelpolynom, 17
- Spreizung, 15
- Sprungantwort
 - aus $H(z)$, 12
 - Grenzwert aus Systemmatrizen, 12
- stabil, 22
 - 2.Grad, 23
 - Schur-Cohn-Test, 23
- Stabilisieren, 24
- Stabilitätsdreieck, 23
- Standardzerlegungen, 5
- Systemeigenschaften, 22
 - Allpaß, 25, 26
 - Bandpaß, 26
 - Bandsperre, 26
 - Hochpaß, 26
 - kausal, 22
 - Linearphasig, 24
 - Maximalphasig, 25
 - Minimalphasig, 25
 - reelwertig, 22
 - rekursiv/nicht rekursiv, 25
 - stabil, 22
 - 2.Grad, 23
 - Schur-Cohn-Test, 23
 - stabilisieren, 24
 - Tiefpaß, 26
- Tabellen
 - DFT, 9
- τ_g
 - siehe Gruppenlaufzeit, 20
- Tiefpaß, 26
- Toleranzschemata, 33
- Transformation, TP/HP/BP, 30
- Tschebyscheff DB, 35
- Tschebyscheff SB, 35
- Tschebyscheff-Polynome, 35
- Tschebyscheffapproximation, 29
- Unterabtastung, 14
- Varianz, 10
- w-z, 34
- Wortlänge,zusätzliche, 38
- Z-Transformierte, 4, 11
 - inverse, 4, 11
- z-w, 34
- zusätzliche Wortlänge, 38
- Zustand
 - Grenzwert aus Systemmatrizen, 12
- Zyklische Faltung
 - mit DFT, 8