

**FORMELSAMMLUNG DER
TECHNISCHEN
ELEKTRODYNAMIK**

Heinz Teutsch

9. Oktober 1998

INHALTSVERZEICHNIS

VEKTORANALYSIS	1
Kurven-, Flächen- und Volumenelemente	1
Vektoranalytische Operationen	1
Integralsätze	2
Allgemeine Formeln	2
Umrechnungen von Einheitsvektoren	3
LADUNG, STROM UND ELEKTROMAGNETISCHES FELD ...	4
Coulombsches Gesetz	4
Ampéresches Gesetz	4
Kontinuitätsgleichung	5
Lorentzsches Kraftgesetz	5
E und B Feld gleichförmig bewegter Punktladungen	5
Elektromagnetische Wechselwirkung zweier bewegter Punktladungen	6
Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem	6
MAXWELLSCHES GLEICHUNGEN	7
Das Gesetz von Biot-Savart	7
Das Durchflutungsgesetz	8
Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung	9
Grenzbedingungen für E und B	9
ELEKTROSTATIK	10
Elektrisches Potential und elektrisches Feld	10
Elektrischer Dipol	11
Apolloniuskreisbeziehungen	11
Poissonsche Differentialgleichung	12
Energie des E Feldes	12
METALLISCHE LEITER	14
Ohmsches Gesetz	14
Hall-Effekt	14
Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen	14
Ohmscher Widerstand	16
Mehrleitersysteme	17
MAGNETOSTATIK	19
Vektorpotential	19
Magnetischer Dipol	19

Selbstinduktivität	21
Wechselseitige Induktivitäten	21
INDUZIERTER QUASISTATIONÄRE STRÖME	23
Quasistationäre Elektrodynamik	23
Induzierte Schleifenströme	23
Energie des \mathbf{B} Feldes	24
Bewegte Leiterschleifen	24
ELEKTRISCH POLARISIERBARE STOFFE	26
Elektrische Polarisation	26
Polarisationsladungen	26
Polarisationsstrom	27
Freie Ladungen und elektrische Verschiebungsdichte	27
Elektrische Materialgrößen	28
MAGNETISCH POLARISIERBARE STOFFE	30
Magnetische Polarisation	30
Magnetisierungsströme	30
Freie Ströme und magnetische Feldstärke	30
Magnetische Materialgrößen	31
Die Maxwell-Gleichungen mit \mathbf{D} und \mathbf{H}	33
ELEKTROMAGNETISCHE ENERGIEBILANZ	34
Elektrische Leistungsdichte	34
Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika	34
Magnetische Leistungsdichte	34
Gespeicherte Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe	35
Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor)	35
RETARDIERTE LÖSUNGEN DER MWG	36
Allgemeine homogene Wellengleichungen	36
Inhomogene Wellengleichung für \mathbf{E} und \mathbf{B}	36
Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale	36
Retardierte Potentiale	37
Zeitveränderlicher Dipol (Hertzscher Dipol)	38
Zeitveränderlicher magnetischer Dipol (Fitzgeraldscher Dipol)	40
Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen	41
ANHANG: KOORDINATENSYSTEME	42

VEKTORANALYSIS

Kurven-, Flächen- und Volumenelemente

$$d\mathbf{r} = d\varrho \mathbf{e}_{\varrho} + \varrho d\alpha \mathbf{e}_{\alpha} + dz \mathbf{e}_z \quad (1.53a)$$

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\vartheta \mathbf{e}_{\vartheta} + r \sin \vartheta d\alpha \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.53b)$$

$$d\mathbf{a} = \varrho d\alpha dz \mathbf{e}_{\varrho} \quad (1.55a)$$

$$d\mathbf{a} = d\varrho dz \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.55b)$$

$$d\mathbf{a} = \varrho d\varrho d\alpha \mathbf{e}_z \quad (1.55c)$$

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha \mathbf{e}_r \quad (1.55d)$$

$$d\mathbf{a} = r \sin \vartheta dr d\alpha \mathbf{e}_{\vartheta} \quad (1.55e)$$

$$d\mathbf{a} = r dr d\vartheta \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.55f)$$

$$dV = \varrho d\varrho d\alpha dz \quad (1.54a)$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha \quad (1.54b)$$

Vektoranalytische Operationen in kartesischen Koordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.6)$$

$$\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.5, 1.7)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.12, 1.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \quad (1.32, 1.33)$$

Vektoranalytische Operationen in Zylinder- und Kugelkoordinaten

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \varrho} \mathbf{e}_{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.56a)$$

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.56b)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_{\varrho}) + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.57a)$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\vartheta} \sin \vartheta) + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] \quad (1.57b)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_{\varrho} + \left[\frac{\partial F_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \varrho} \right] \mathbf{e}_{\alpha} + \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho F_{\alpha}) - \frac{\partial F_{\varrho}}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_z \quad (1.58a)$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_{\alpha} \sin \vartheta) - \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \alpha} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_{\alpha}) \right] \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_{\vartheta}) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_{\alpha} \quad (1.58b)$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.59a)$$

$$\nabla^2 U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \quad (1.59c)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_\varrho \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} G_\alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \quad (1.60a)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} = G_r \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} G_\vartheta \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} G_\alpha \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \alpha} \quad (1.60b)$$

Integralsätze

$$\text{Gauß : } \boxed{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV} \quad (1.14a)$$

bei mehreren nach *außen* orientierten Flächen : $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \sum_\nu \oint_{S_\nu} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_\nu$ (1.14b)

Gauß für Gradienten : $\iiint (\operatorname{grad} U) dV = \oint U d\mathbf{a}$ (1.27)

$$\text{Stokes : } \boxed{\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}} \quad (1.35a)$$

bei mehreren *rechtshändig* orientierten Kurven : $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_\nu \oint_{K_\nu} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_\nu$ (1.35b)

$$\text{Green (Spezialfall 1) : } \boxed{\oint_S (\nabla U) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G (\nabla^2 U) dV} \quad (1.25)$$

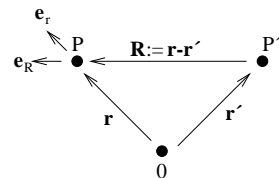
$$\text{Green (Spezialfall 2) : } \boxed{\oint_S (U \nabla U) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_G (U \nabla^2 U + (\nabla U)^2) dV} \quad (1.26)$$

Weiterer Integralsatz : $\oint_S \mathbf{F} \times d\mathbf{a} = - \iiint_G \operatorname{rot} \mathbf{F} dV$ (1.41)

Allgemeine Formeln

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = \mathbf{0}} \quad (1.38)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0} \quad (1.40)$$



$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.63)$$

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{grad} U_2 + U_2 \text{grad} U_1 \quad (1.36a)$$

$$\text{div}(U \mathbf{F}) = U \text{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \text{grad} U \quad (1.36b)$$

$$\text{div}(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \text{rot} \mathbf{F}_2 \quad (1.36c)$$

$$\text{rot}(U \mathbf{F}) = U \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{grad} U \quad (1.36d)$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{F}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{F}) \quad (1.36e)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)U = \mathbf{G} \cdot \text{grad} U \quad (1.36f)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = G_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \quad (1.36g)$$

$$2(\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + \text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{F} \text{div} \mathbf{G} + \mathbf{G} \text{div} \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{rot} \mathbf{G} - \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{F} \quad (1.36h)$$

$$\text{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \text{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \text{rot} \mathbf{F} \quad (1.36i)$$

$$(\mathbf{G} \cdot \nabla)U \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G} \cdot \text{grad} U) + U(\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} \quad (1.36j)$$

$$\text{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \text{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \text{div} \mathbf{F} \quad (1.36k)$$

Umrechnungen von Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_\varrho = \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_x)}_{\cos \alpha} \mathbf{e}_x + \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_y)}_{\sin \alpha} \mathbf{e}_y + \underbrace{(\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_z)}_0 \mathbf{e}_z = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y \quad (1.51a)$$

$$\mathbf{e}_r = \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\varrho)}_{\sin \vartheta} \mathbf{e}_\varrho + \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\alpha)}_0 \mathbf{e}_\alpha + \underbrace{(\mathbf{e}_r \mathbf{e}_z)}_{\cos \vartheta} \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \mathbf{e}_\varrho + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \quad (1.51b)$$

$$\mathbf{e}_x = \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\varrho)}_{\cos \alpha} \mathbf{e}_\varrho + \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\alpha)}_{-\sin \alpha} \mathbf{e}_\alpha + \underbrace{(\mathbf{e}_x \mathbf{e}_z)}_0 \mathbf{e}_z = \cos \alpha \mathbf{e}_\varrho - \sin \alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (\text{A } 40)$$

$$\mathbf{e}_z = \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_r)}_{\cos \vartheta} \mathbf{e}_r + \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\vartheta)}_{-\sin \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \underbrace{(\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\alpha)}_0 \mathbf{e}_\alpha = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \quad (\text{A } 46)$$

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varrho = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \quad (1.51c)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_r = \cos \vartheta \mathbf{e}_\varrho - \sin \vartheta \mathbf{e}_z = \cos \vartheta (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) - \sin \vartheta \mathbf{e}_z \quad (1.51d)$$

$$\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta$$

$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_\alpha = \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_r \stackrel{(1.51b)}{=} \mathbf{e}_x [\sin \vartheta \mathbf{e}_\varrho + \cos \vartheta \mathbf{e}_z] \stackrel{(1.51a)}{=} \sin \vartheta \cos \alpha$$

$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \sin \alpha$$

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \cos \alpha$$

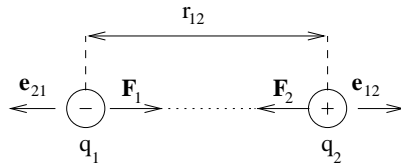
$$\mathbf{e}_y \mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \sin \alpha$$

Nützliche Integralbeziehungen

$$\frac{d}{dx} \int_a^{b(x)} f(x, u) du = \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} du + f(x, b) \frac{db}{dx} \quad (11.61)$$

LADUNG, STROM UND ELEKTROMAGNETISCHES FELD

Coulombsches Gesetz (nur für ruhende Ladungen!)



$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{21} = -\mathbf{F}_2 \quad (2.5a,b)$$

Feldliniengleichung

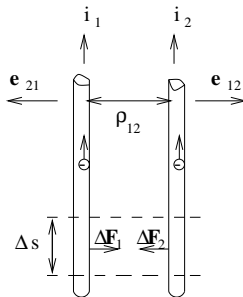
$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Ladung

$$Q = \begin{cases} \iiint_G \rho \, dV \\ \iint_S \sigma \, da \\ \int_K \tau \, ds \end{cases} \quad (2.6b, 2.7b, 2.8b)$$

Kraft einer Linienladung auf eine Punktladung : $\mathbf{F}_q = q \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{e}_\rho$ (2.9)

Ampèresches Gesetz



$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{F}_1}{\Delta s} &= -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi \rho_{12}} \mathbf{e}_{21} \\ \Delta \mathbf{F}_2 &= -\Delta \mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -\dot{I} \quad (\dot{I} : \text{Gesamtstromstärke durch Hüllfläche}) \quad (2.22)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad (2.23)$$

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} ds + \sum (-i_\nu) = -\dot{Q} = \dot{I} \quad (\text{A 8})$$

$$\text{mit } \mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} = \sigma \mathbf{u} \quad \text{und} \quad i = \tau \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_u \quad (2.11b, 2.15)$$

$$\text{Für dünne Drähte (in z-Richtung) gilt : } \frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (\text{Bsp. 2.3.1a})$$

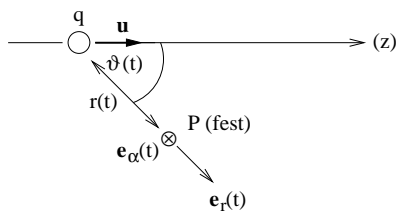
Lorentzsches Kraftgesetz

$$\boxed{\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (2.24)$$

Bei z.B. zwei Ladungen gilt : $\mathbf{F}_1 = q_1 (\mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}^{(2)})$

Dabei bedeutet ⁽²⁾ das jeweilige Feld von Ladung 2 am Ort der Ladung 1 gemessen.

\mathbf{E} und \mathbf{B} Feld gleichförmig bewegter Punktladungen



$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{e}_r} \quad (2.25)$$

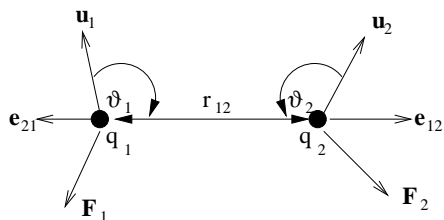
$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \mathbf{u} \times \mathbf{e}_r} \quad (2.26)$$

$$\text{mit } \mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{0}} \quad (2.27)$$

$$\text{mit } |\mathbf{u}| \ll c_0 \rightarrow \boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \mathbf{u} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 q u_z \sin \vartheta}{4\pi r^2} \mathbf{e}_\alpha} \quad (2.28)$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u} \times \mathbf{E}} \quad (2.29)$$

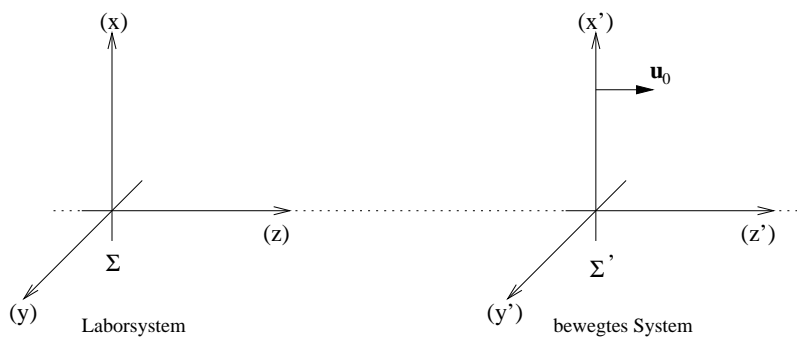
Elektromagnetische Wechselwirkung zweier bewegter Punktladungen



$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \frac{1 - \frac{u_2^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta_2}} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{21} + \mu_0 \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{e}_{21}) \right] \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2} \frac{1 - \frac{u_1^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta_1}} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{e}_{12} + \mu_0 \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_{12}) \right] \quad (2.30b)$$

Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem



Für $\frac{u_0^2}{c_0^2} \ll 1$ gilt :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_0 \times \mathbf{B} \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u}_0 \times \mathbf{E} \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp} \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{J}'_{\parallel} = (\mathbf{J}_{\parallel} - \rho \mathbf{u}_0) \quad (2.36b)$$

$$\rho' = \rho - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{J} \quad (2.36c)$$

MAXWELLSCHE GLEICHUNGEN

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varrho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}} \quad (3.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)} \quad (3.2)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0} \quad (3.3)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]} \quad (3.4)$$

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_G \varrho(\mathbf{r}, t) dV = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (3.41)$$

$$\oint_K \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = -\dot{\Phi}(\dot{\mathbf{B}})(t) \quad (3.42)$$

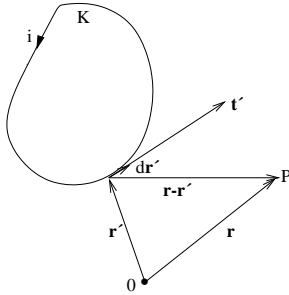
$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (3.43)$$

$$\oint_K \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left[\iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \right] = \mu_0 \left[I(t) + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{a} \right] \quad (3.44)$$

Die Quellen von \mathbf{E}

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & \text{wenn S die Punktladung einschließt} \\ 0, & \text{wenn S die Punktladung nicht einschließt} \end{cases} \quad (3.5a, 3.5b)$$

Das Gesetz von Biot-Savart



$$\mathbf{B}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_K \frac{i d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3.10b)$$

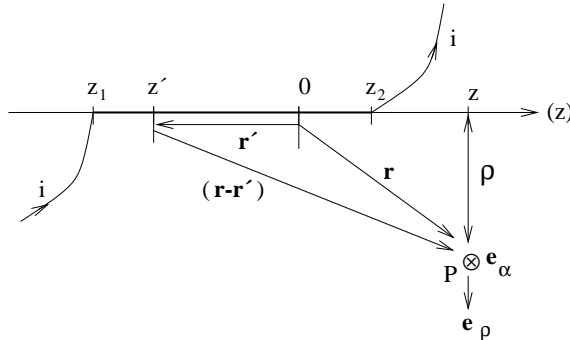
$$\mathbf{B}^{(K)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K} da' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B}^{(J)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_G \frac{\mathbf{J} dV' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}_{\text{ges}} = \mathbf{B}^{(i)} + \mathbf{B}^{(K)} + \mathbf{B}^{(J)}$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Anwendung: Linienstrom



Es gilt : $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z$, $d\mathbf{r}' = dz'\mathbf{e}_z$

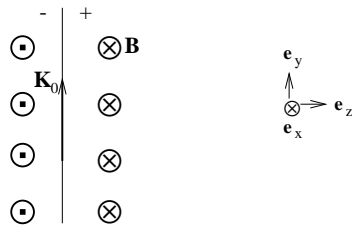
$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{B}(P) &= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz' \mathbf{e}_z \times [(z-z')\mathbf{e}_z + \rho\mathbf{e}_\rho]}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \rho \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}^3} \mathbf{e}_\alpha = \\ &= \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[\frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{(z-z_2)^2 + \rho^2}} \right] \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Feld eines geraden Linienstroms ($z_1 \rightarrow \leftrightarrow\infty$, $z_2 \rightarrow +\infty$): $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha$ (3.11b)

Feld einer torusförmigen Spule ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$ außen) : $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\alpha$ (innen) (Bsp. 6.4.2)

Feld einer unendlich langen Zylinderspule: $\mathbf{B}(0,0,z) = \mu_0 K_\alpha \mathbf{e}_z$ (A 13)

Feld einer unendlich ausgedehnten Ebene $\perp z$ -Achse : $\mathbf{B} = \pm \frac{\mu_0 K_0}{2} \mathbf{e}_x$ (3.45)



Kraft auf ein Stromelement:
$$d\mathbf{F} = \begin{cases} i d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{K} da \times \mathbf{B} \\ \mathbf{J} dV \times \mathbf{B} \end{cases} \quad (A 15)$$

Das Durchflutungsgesetz

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \mu_0 \sum i_\nu, \text{ wobei die } i_\nu \text{ im Rechtsschraubensinn von K umfaßt werden} \\ 0, \text{ wenn K keinen Strom umfaßt} \end{cases} \quad (3.23, 3.24)$$

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I = \mu_0 \left(\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \epsilon_0 \iint_S \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{a} \right) = \mu_0 (I_D + I_{\text{versch}}) \quad (3.25, 3.29)$$

Feld im Inneren einer Zylinderspule (Länge l) : $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 N i}{l} \mathbf{e}_z$ (A 93)

Magnetischer Fluß und seine zeitliche Änderung

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (3.32)$$

$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \dot{\Phi}^{(\mathbf{u})} = \iint_S \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{a} - \oint_K (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.33, 3.34)$$

Achtung: In die integrale Form des Induktionsgesetzes (3.42) geht nur $\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})}$ ein !!

Im Gleichstromfall gilt: $\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} \equiv 0$

Grenzbedingungen für \mathbf{E} und \mathbf{B}

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{E} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{pol}} + \sigma_f}{\epsilon_0}} \quad (3.65)$$

In Worten: Die Normalkomponente von \mathbf{E} an einer geladenen Fläche ist unstetig und springt um $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, wenn man von der negativen zur positiven Seite hindurchtritt.

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{E} := \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = \mathbf{0}} \quad (3.66)$$

In Worten: Alle Tangentialkomponenten von \mathbf{E} bzgl. einer Fläche sind dort stetig.

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{B} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = 0} \quad (3.67)$$

In Worten: Die Normalkomponente von \mathbf{B} ist an allen Grenzflächen und unter allen Umständen stetig.

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{B} := \mathbf{n} \times (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) = \mu_0 \mathbf{K} = \mu_0 (\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_{\text{mag}})} \quad (3.68)$$

In Worten: Die zum Flächenstrom senkrechte Tangentialkomponente von \mathbf{B} ist unstetig an strombelegten Flächen, die parallele Tangentialkomponente dagegen stetig.

Grenzbedingung der Kontinuitätsgleichung: $\boxed{\text{Div } \mathbf{J} := \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = -\dot{\sigma}}$ (3.69)

Merke : **Berechnung eines Feldes entweder über die integralen MWG**

(im symmetrischen Fall anwenden) oder über die differentiellen

MWG+Grenzbedingungen

ELEKTROSTATIK

Die MWG in der Elektrostatik

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} = \frac{\varrho_{\text{frei}} + \varrho_{\text{pol}}}{\epsilon_0}} \quad (4.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}} \quad (4.2)$$

Elektrisches Potential und elektrisches Feld

$$\boxed{\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi} \quad (4.3)$$

φ existiert, da Gl. (4.2) im ganzen (einfach zusammenhängenden) Raum gelten soll.

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.4)$$

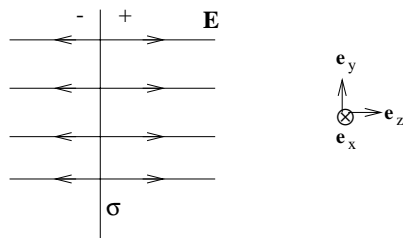
$$\text{Punktladungspotential für } r_0 \rightarrow \infty : \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.7b)$$

$$\text{Potential einer Linienladung } \tau : \varphi(\varrho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\varrho_0}{\varrho} \quad (4.8)$$

$$\text{Feld einer Linienladung : } \mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \varrho} \mathbf{e}_\varrho \quad (4.9)$$

$$\text{Potential einer geladenen Ebene } \perp z\text{-Achse : } \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-|z|) \quad (A 29)$$

$$\text{Feld einer unendlich ausgedehnten, geladenen Ebene } \perp z\text{-Achse : } \mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \quad (3.70)$$



$$\text{Potential einer homogen geladenen Kugel : } \varphi = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) , & r < R \\ \frac{\varrho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} , & r > R \end{cases} \quad (4.26a,b)$$

$$\text{mit : } Q_0 = \varrho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$$

Grenzbedingungen des elektrischen Potentials

$$\boxed{\mathbf{n} \cdot ((\nabla \varphi)^+ - (\nabla \varphi)^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (4.5)$$

$(\nabla \varphi)^{\pm}$ heißt: zuerst den Gradienten bilden und dann z.B. $r=R$ einsetzen.

$$\text{Potential ist stetig: } \boxed{\varphi^+ = \varphi^-} \quad (4.6)$$

Elektrischer Dipol

$$\text{Dipolmoment (zeigt von neg. zur pos. Ladung)} : \mathbf{p} = q \mathbf{l} \quad (4.12)$$

$$\text{Potential eines Dipols (Näherung)} : \varphi(P) = \frac{q \mathbf{l} \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.13)$$

$$\text{Übergang zum Punktdipol} : \mathbf{l} \rightarrow 0, \quad \mathbf{p} = q \mathbf{l} = \mathbf{const.} \quad (4.14)$$

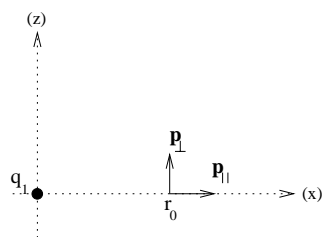
$$\text{Potential eines Punktdipols (exakt)} : \varphi(P) = \frac{q \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.13)$$

$$\text{Feld eines Punktdipols} : \mathbf{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \quad (4.15)$$

$$\text{Kraft auf Punktdipol im externen } \mathbf{E} \text{ Feld} : \mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \quad (4.17)$$

(Berechnung der Kraft in Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten \rightarrow Gl. (1.60))

$$\text{Im statischen Fall (rot } \mathbf{E} = 0) \text{ gilt} : \mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} \Big|_{r=r_0} = \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \Big|_{r=r_0} \quad (A 32)$$

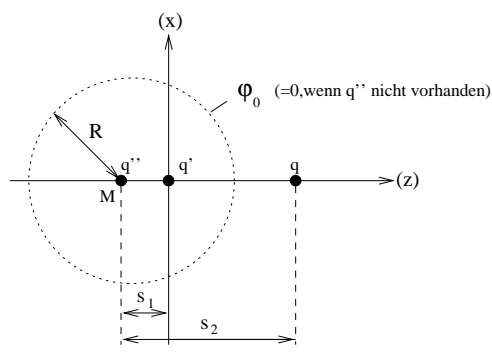


$$\mathbf{F}(\text{auf } \mathbf{p}_{||}) = -\frac{q_1 \mathbf{p}_{||}}{2\pi\epsilon_0 r_0^3} \quad \text{oder} \quad \mathbf{F}(\text{auf } \mathbf{p}_{\perp}) = \frac{q_1 \mathbf{p}_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \quad (A 32)$$

$$\text{Drehmoment auf Punktdipol im externen Feld} : \mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (4.18)$$

Apolloniuskreisbeziehungen (vgl. A 28)

Alle Punkte mit gleichem Abstandsverhältnis (Äquipotentialfläche) bezüglich zweier fest vorgegebener Punkte (Ladungen) liegen auf einem Apolloniuskreis ($\rightarrow \varphi_0 = 0$).



$$Q_0 = q'' + q'$$

$$\text{Es gilt : } \boxed{s_1 s_2 = R^2} \quad \boxed{q' = -\frac{R}{s_2} q} \quad \boxed{q = -\frac{R}{s_1} q'} \quad \boxed{q'' = 4\pi\epsilon_0 R \varphi_0}$$

Poissonsche Differentialgleichung

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (4.25)$$

Laplace-Gleichung : $\Delta \varphi = 0$

Lösung der Poisson-Gleichung für eine im Endlichen liegende Ladungsverteilung :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (4.31)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad (4.32)$$

Eine Lösung der Poisson-Gleichung, die eine der vier folgenden Randbedingungen erfüllt ist bis auf eine additive Konstante eindeutig (φ_1 und φ_2 seien zwei Lösungen der Poisson-Gleichung in einem Gebiet G mit der Randfläche S) :

(a) (Dirichletsche Randbedingung). Das Potential ist auf der Randfläche S vorgeschrieben:

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

(b) (Neumannsche Randbedingung). Die Normalkomponente des Potentialgradienten ist vorgeschrieben: $\nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} \, da = \nabla \varphi_2 \cdot \mathbf{n} \, da$ (falls $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \rightarrow E_r = 0$).

(c) Das Potential soll einen beliebigen, aber konstanten Wert auf S und das über S erstreckte Hüllenintegral des Potentialgradienten einen vorgeschriebenen Wert besitzen:

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2 = \text{const und } \oint_S (\nabla \varphi_1 \Leftrightarrow \nabla \varphi_2) \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (\text{falls } \oint_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0 \rightarrow E_\vartheta = 0).$$

(d) Fläche S sei Fernkugel. Das Potential soll dort mindestens mit $1/r$ abnehmen. Also nimmt dort $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$ mindestens mit $1/r^2$ ab.

Energie des \mathbf{E} Feldes

$$A_a = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N q_\nu \varphi_\nu \quad (4.47)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_G \varphi \rho \, dV + \frac{1}{2} \iint_S \varphi \sigma \, da \quad (4.51)$$

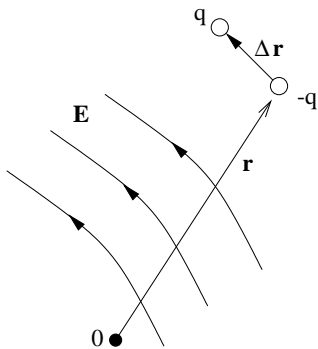
dabei ist φ das von *sämtlichen* Ladungen erzeugte Potential.

$$\text{Räumliche Energiedichte : } w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (4.53)$$

$$\rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Raum}} \mathbf{E}^2 dV \quad (4.55)$$

Potentielle Energie eines Dipols (A 35)

W_{pot} : von äußeren Kräften aufzuwendene Arbeit, um aktuelle Konfiguration zu erhalten (im statischen Feld gilt Kräftegleichgewicht: $\mathbf{F}_a \stackrel{!}{=} \mathbf{F}_{el}$).



$$\mathbf{p} = q \Delta \mathbf{r}$$

$$W_{\text{pot}} = A_a \stackrel{!}{=} \left[q \int_{-\infty}^{r+\Delta \mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' + (-q) \int_{-\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' \right] = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Das Minuszeichen kommt daher, daß im elektrostatischen Fall die äußere Kraft und die Kraft im \mathbf{E} Feld ($\mathbf{F} = q \mathbf{E}$) *entgegengesetzt gleich* sein müssen.

METALLISCHE LEITER

Ohmsches Gesetz

$$\text{Ohmsches Gesetz : } \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} \quad (5.5)$$

Allgemeines Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter bei Anwesenheit eines äußeren \mathbf{B} Feldes :

$$\boxed{\mathbf{J} = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})} \quad (5.6)$$

Hall-Effekt

$$\text{Driftgeschwindigkeit von Elektronen : } \mathbf{u}_D = \frac{b}{e} \mathbf{F} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} - b(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) = \kappa(\mathbf{E} + R_H \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (5.7, 5.10)$$

$$\mathbf{J}^2 = \kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{0} \text{ , wenn } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{J} \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{b}{\kappa} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{Hall-Feld}) \quad (5.9b)$$

$$\tan \beta_H = \frac{|\mathbf{E}_{\perp}|}{|\mathbf{E}_{\parallel}|} = b |\mathbf{B}_z| \quad (5.11b)$$

Dabei bezeichnet β_H den Hallwinkel ($\beta_H = \sphericalangle(\mathbf{J}, \mathbf{E})$)

Joulesche Wärme

$$\text{Räumliche Leistungsdichte : } p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (5.13)$$

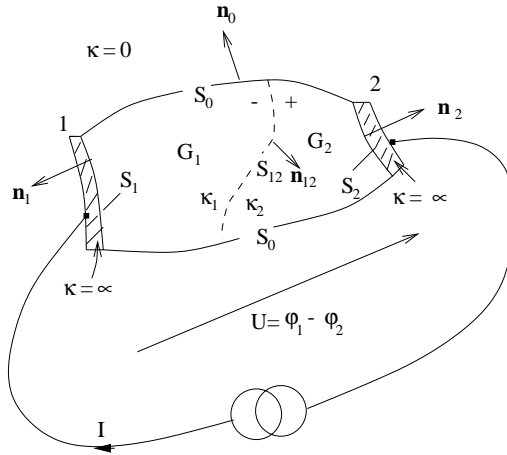
$$\text{Im Falle eines ohmschen Leiters : } p = \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 \quad (5.14)$$

Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen

$$\text{D.h. aus Gl. (2.23) folgt : } \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (5.15)$$

$$\text{In den Bereichen konstanter Leitfähigkeit gilt : } \boxed{\nabla^2 \varphi = 0} \quad (5.17)$$

Gl. (5.17) ist eine Laplacegleichung mit folgenden Rand- sowie Grenzbedingungen:



$$\varphi = \text{const. (auf } S_1 \text{ bzw. } S_2) \quad \text{und} \quad (5.18a)$$

$$\iint_{S_1} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_1 da_1 = \frac{I}{\kappa_1} \quad \text{oder} \quad (5.18b)$$

$$\iint_{S_2} \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_2 da_2 = -\frac{I}{\kappa_2} \quad (5.18c)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\kappa_1 (\nabla \varphi)^- - \kappa_2 (\nabla \varphi)^+) = 0 \quad (\text{überall auf } S_{12}) \quad (5.19)$$

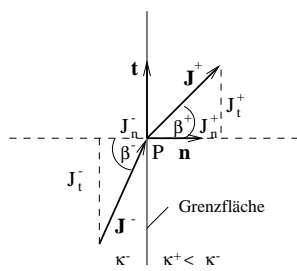
$$\mathbf{n}_0 \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (\text{überall auf } S_0) \quad (5.20)$$

$$\varphi^+ = \varphi^- \quad (\text{überall auf } S_{12}) \quad (5.21)$$

Anstelle von I hätte man auch U vorgeben können; dann werden Gl. (5.18a,b)

ersetzt durch : $\varphi_1 - \varphi_2 = U$

Grenzflächen zwischen Bereichen verschiedener Leitfähigkeit



$$\tan \beta^+ = \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \tan \beta^- \quad (5.24)$$

$$\text{Div } \mathbf{J} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}^+ - \mathbf{J}^-) = \mathbf{n} \cdot (\kappa^+ \mathbf{E}^+ - \kappa^- \mathbf{E}^-) \stackrel{(3.69)}{=} \dot{\sigma} \stackrel{\text{hier}}{=} 0 \quad (5.22)$$

In Worten: Die Normalkomponente *stationärer* Stromdichten ist an Grenzflächen stetig, während die Normalkomponente von \mathbf{E} für $\kappa^- \neq \kappa^+$ unstetig ist.

$$\mathbf{t} \cdot \left(\frac{1}{\kappa^+} \mathbf{J}^+ - \frac{1}{\kappa^-} \mathbf{J}^- \right) = 0 \quad (5.23)$$

In Worten: Die Tangentialkomponenten sind unstetig, wenn die Leitfähigkeiten auf der positiven bzw. negativen Seite der Grenzfläche verschieden sind.

Bemerkung: Jeder Homogenitätsbereich von κ ist ladungsfrei!

Ohmscher Widerstand

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = RI \quad (5.33)$$

$$P = \iiint^{(1)} \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 dV = \iiint \kappa (\nabla \varphi)^2 dV = UI = RI^2 \quad (5.34)$$

$$\text{Widerstand eines homogenen zylindrischen Leiters : } R = \frac{l}{\kappa a} \quad (5.35)$$

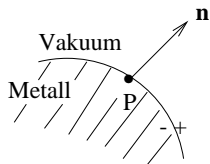
Stromlose ruhende Metallkörper

$$\text{In stromlosen, ruhenden Metallkörpern gilt : } \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(q)} + \mathbf{E}^{(\sigma)} = \mathbf{0} \quad (5.37, 5.38)$$

wobei σ die durch Influenz entstandene Flächenladung angibt.

→ stromlose ruhende Metallkörper und ibs. ihre Oberflächen sind Orte konstanten Potentials.

Grenzbedingungen an Metalloberflächen

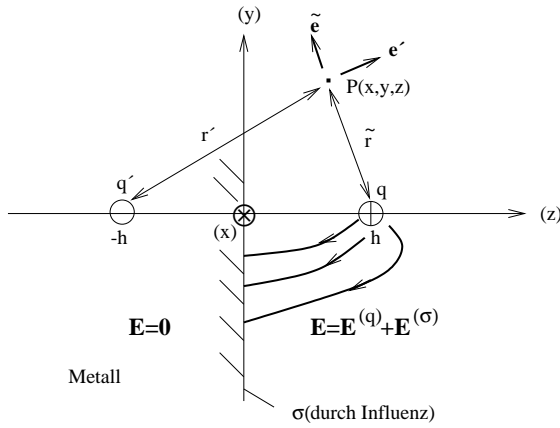


$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \mathbf{n}(P) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{E}^-(P) = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}^+(P) = \mathbf{0}$$

Fiktive (virtuelle) Spiegelladung (Bsp. 5.2.2a, S173f)



$$\mathbf{E}^{(q)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tilde{\mathbf{e}} \quad (\text{im ganzen Raum})$$

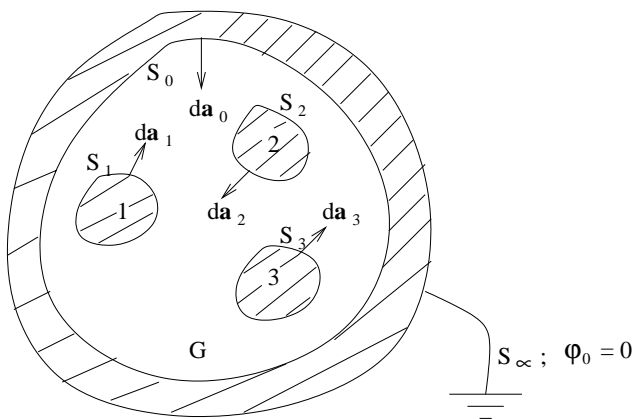
$$\mathbf{E}^{(\sigma)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \tilde{\mathbf{e}} \quad (\text{für } z < 0)$$

$$\mathbf{E}^{(\sigma)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}' \quad (\text{für } z > 0)$$

Die Influenzladungen rufen also eine Feldverteilung hervor, die im rechten Halbraum so aussieht, als ob sie von einer Punktladung -q am Ort q' herkäme.

Mehrleitersysteme

Def.: Isolierte Metallkörper, die sich durch Influenz beeinflussen.



$$Q_\nu = -\epsilon_0 \oint_{S_\nu} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{a}_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.44)$$

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) \quad : \leftrightarrow \text{ Kondensatorbetrieb} \quad (5.45)$$

$$\text{Potentialkoeffizienten : } \varphi_\nu = \sum_{\mu=1}^3 p_{\mu\nu} Q_\mu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.46)$$

$$\text{mit : } p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu} \quad (5.53)$$

$$\text{Kapazitätskoeffizienten : } Q_\nu = \sum_{\mu=1}^3 c_{\mu\nu} \varphi_\mu \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (5.47)$$

$$\text{mit : } c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} \quad (5.54)$$

$$\text{weitere Eigenschaften : } c_{\nu\nu} > 0, \quad c_{\mu\nu} < 0, \quad \sum_{\nu} c_{\nu\mu} > 0 \quad (5.56a-c)$$

Durch Inversion der Kapazitätskoeffizienten erhält man die Potentialkoeffizienten.

Speziell für ein Zweileitersystem gelten folgende Beziehungen :

$$p_{\mu\nu} > 0 \quad \forall \mu, \nu \quad \text{und} \quad p_{\nu\nu} > p_{\mu\nu} \quad \forall \mu \neq \nu \quad (5.62)$$

$$\text{Plattenkondensator : } C = \epsilon_0 \frac{a}{d} \quad (5.67)$$

$$\text{Kugelkondensator : } C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_i}{r_a - r_i} \quad (5.68)$$

Teilkapazitäten eines Mehrleitersystems

$$C_{\nu\nu} := \sum_{\mu} c_{\nu\mu} \quad (5.69a)$$

$$C_{\nu\mu} := -c_{\nu\mu} \quad \text{falls } \nu \neq \mu \quad (5.69b)$$

$$Q_1 = C_{11} U_{10} + C_{12} U_{12} + C_{13} U_{13} \quad (5.70a)$$

$$Q_2 = C_{21} U_{21} + C_{22} U_{20} + C_{23} U_{23} \quad (5.70b)$$

$$Q_3 = C_{31} U_{31} + C_{32} U_{32} + C_{33} U_{30} \quad (5.70c)$$

Wobei $U_{\nu\mu} = \varphi_\nu \leftrightarrow \varphi_\mu$ ($\nu = 1, 2, 3; \mu = 0, 1, 2, 3$) die Spannungen zwischen den Leitern bzw. zwischen diesen und der umhüllenden Metallwand sind.

$$\text{Kapazität eines kurzgeschl. Zweileiters gegen Fernkugel : } C = c_{11} + c_{22} + 2c_{12} \quad (A 51)$$

$$\text{Kapazität des Zweileitersystems im Kondensatorbetrieb : } \tilde{C} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \quad (A 51)$$

Energie eines Mehrleitersystems

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_G \mathbf{E}^2 dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S \varphi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} [\varphi_1 Q_1 + \varphi_2 Q_2 + \varphi_3 Q_3 - \varphi_0 (Q_1 + Q_2 + Q_3)] \\ &= \frac{1}{2} [Q_1 (\varphi_1 - \varphi_0) + Q_2 (\varphi_2 - \varphi_0) + Q_3 (\varphi_3 - \varphi_0)] \\ &= \frac{1}{2} (Q_1 U_{10} + Q_2 U_{20} + Q_3 U_{30}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\text{Energie im Kondensator : } W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (5.66)$$

MAGNETOSTATIK

Die MWG in der Magnetostatik

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad (6.1)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (6.2)$$

Vektorpotential

$$\boxed{\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}} \quad (6.3a)$$

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.3b)$$

Der Einfachheit halber setzt man : $\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A} = 0}$ (6.4)

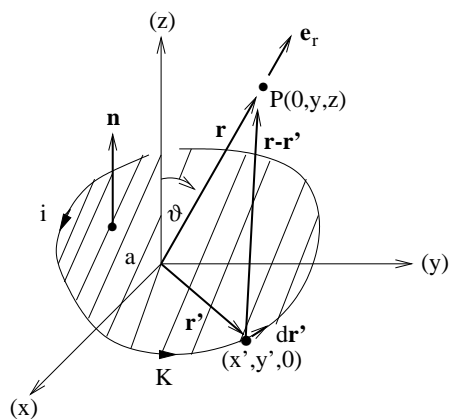
DGL für das Vektorpotential : $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}}$ (6.7)

Lösung der DGL für eine im Endlichen liegende Stromverteilung :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} da' \\ \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{cases} \quad (6.10, 6.12)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \operatorname{rot} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' \quad (6.14)$$

Magnetischer Dipol



Dipolmoment (\mathbf{n} rechtshändig zu i orientiert): $\boxed{\mathbf{m} = i a \mathbf{n}}$ (6.21)

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Potential eines Dipols (Näherung): $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_\alpha$ (6.19)

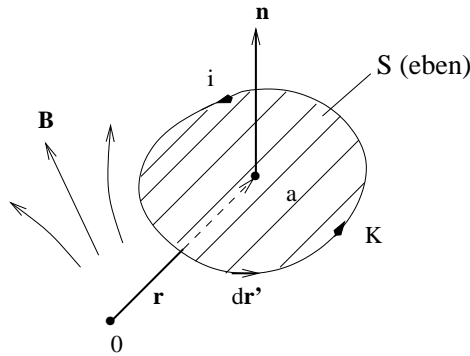
Feld eines Dipols (Näherung) : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$ (6.20)

Übergang zum Punktdipol : $a \rightarrow 0$, $\mathbf{m} = i a \mathbf{n} = \text{const.}$ (6.22)

Potential eines *Punktdipols* (exakt): $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_\alpha$ (6.23)

Feld eines Punktdipols (exakt) : $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$ (6.24)

Kraft auf magnetischen Dipol im äußeren Feld



$\mathbf{F} = i \oint (d\mathbf{r}' \times \mathbf{B})$ (6.27)

$\mathbf{F} = \nabla^K (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ (6.28)

Bei der Auswertung der Formel ist zu beachten, daß \mathbf{m} eine Konstante und der Gradient der Ortsfunktion $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$ an der Stelle des Dipols zu nehmen ist.

Bei statischen Magnetfeldern ($\text{rot } \mathbf{B} = 0$) gilt : $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ (6.30)

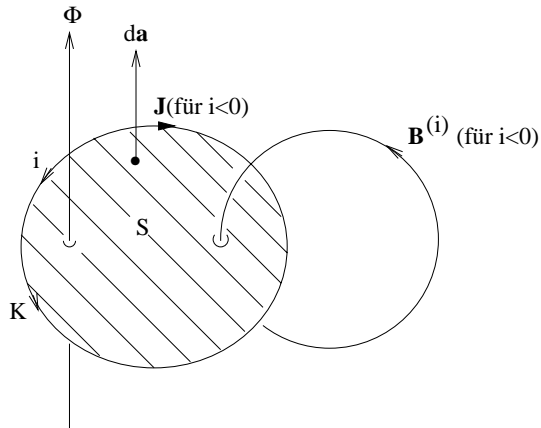
Für $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}(P_0)$ folgt : $\mathbf{F} = \pm |\mathbf{m}| (\nabla |\mathbf{B}|) \Big|_{P_0}$ („-“ für $\mathbf{m} \updownarrow \mathbf{B}(P_0)$) (6.31)

Drehmoment : $\mathbf{T} = \oint \mathbf{r} \times (i d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = i (\oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{r} - \oint (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{B})$ (A 53)

Für ebene Stromschleifen gilt ($\mathbf{B}^{(\text{ext})}$ homogen) : $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}^{(\text{ext})} \stackrel{!}{=} \mathbf{T}_a$ (A 53)

Achtung: Kraft und Drehmoment auf Stromschleifen im *eigenen* \mathbf{B} Feld ist $\mathbf{0}$!

Selbstinduktivität



Achtung: Φ ist immer rechtshändig zum Strom orientiert

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B}^{(i)} \cdot d\mathbf{a} + \iint_S \mathbf{B}_{\text{fremd}} \cdot d\mathbf{a} = \Phi^{(i)} + \Phi_{\text{fremd}}$$

mit $\Phi^{(i)} = L i$

(6.32)

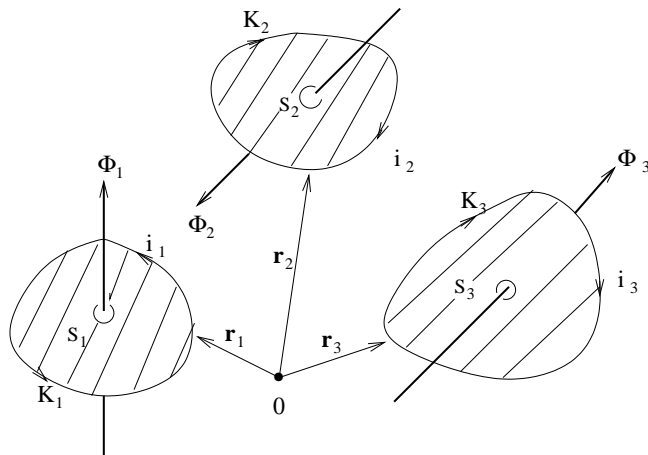
Induktivität einer torusförmigen Spule der Höhe h : $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} h \ln \frac{\rho_a}{\rho_i}$

(6.33b)

Induktivität einer Koaxialleitung der Länge l : $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_a}{\rho_i} \right) l$

(7.22a)

Wechselseitige Induktivitäten



$$\Phi_1 = L_1 i_1 + \Phi_1^{(2)} + \Phi_1^{(3)} = L_1 i_1 + \iint_{S_1} \mathbf{B}^{(2)} \cdot d\mathbf{a}_1 + \iint_{S_1} \mathbf{B}^{(3)} \cdot d\mathbf{a}_1$$

(6.34, 6.35)

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \quad (6.36a)$$

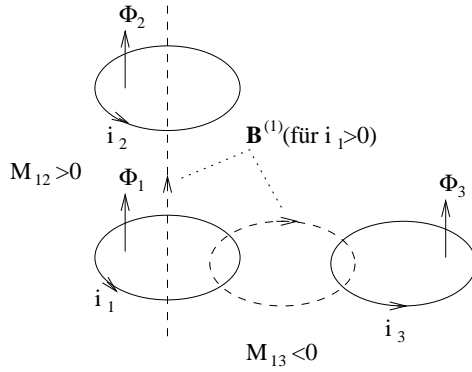
$$\Phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \quad (6.36b)$$

$$\Phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \quad (6.36c)$$

$$\text{mit } L_\nu = \left. \frac{\Phi_\nu}{i_\nu} \right|_{\substack{i_\mu=0 \\ \mu \neq \nu}} > 0 \quad (6.32)$$

$$\text{und } M_{\nu\mu} = \left. \frac{\Phi_\nu^{(\mu)}}{i_\mu} \right|_{i_\kappa=0} \stackrel{\kappa \neq \mu}{<} 0 \quad (6.38)$$

$$\text{Weiterhin gilt : } M_{\mu\nu} = M_{\nu\mu} \quad (6.40)$$



Bei Erweiterung des Gleichungssystems (6.36) bleiben die alten Koeffizienten erhalten (im Ggs. zu den Kapazitätskoeffizienten), solange am ursprünglichen Teil der Anordnung nichts verändert wurde.

Induzierte Spannungen im quasistationären Fall

$$U_1 = - \oint_{K_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{d}{dt}(L_1 i_1) + \frac{d}{dt}(M_{12} i_2) + \frac{d}{dt}(M_{13} i_3) \quad (7.3a)$$

$$U_2 = - \oint_{K_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{d}{dt}(M_{21} i_1) + \frac{d}{dt}(L_2 i_2) + \frac{d}{dt}(M_{23} i_3) \quad (7.3b)$$

$$U_3 = - \oint_{K_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}_3 = \frac{d}{dt}(M_{31} i_1) + \frac{d}{dt}(M_{32} i_2) + \frac{d}{dt}(L_3 i_3) \quad (7.3c)$$

INDUZIERTER QUASISTATIONÄRE STRÖME

Quasistationäre Elektrodynamik (d.h. \mathbf{J} und ρ zeitabhängig)

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}', t) \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' = -\nabla\varphi_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.43)$$

$$\text{mit } \varphi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (6.43c)$$

$$\mathbf{B}_{BS}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dV' = \text{rot } \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.44)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (6.44c)$$

$$\mathbf{E}_{\text{ind}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = -\dot{\mathbf{A}}_s(\mathbf{r}, t) \quad (6.55)$$

$$\text{Es gilt: } \mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{BS} \quad (6.56)$$

Weiterhin gilt (Gln. (6.58-6.60)) :

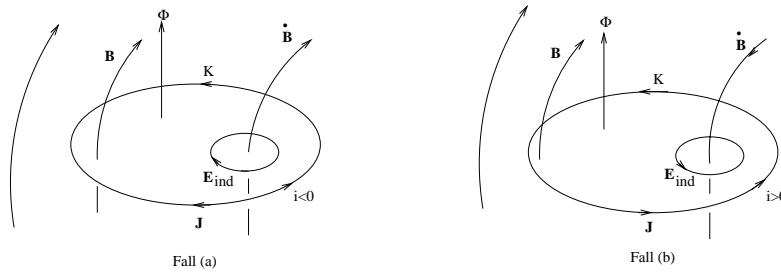
$$\text{div } \mathbf{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \mathbf{E}_C = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{B}_{BS} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B}_{BS} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_C)$$

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{ind}} = \epsilon_0 \mu_0 \dot{\varphi}_s \quad \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ind}} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$\text{div } \mathbf{J} = -\dot{\rho}$$

Induzierte Schleifenströme



$$\mathbf{J} = \frac{i}{a} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (7.4)$$

$$\text{Für } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ gilt } (\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \rightarrow \text{Gl. (7.45)}) : \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = i \oint_K \frac{ds}{\kappa a} =: i \overset{\circ}{R} = -\dot{\Phi}(\dot{B}) \quad (7.5 - 7.7)$$

In das Ohmsche Gesetz geht zwar das gesamte Feld $\mathbf{E} = \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_{\text{ind}}$ ein, doch trägt der wirbelfreie Summand \mathbf{E}_C nichts zur Umlaufspannung bei.

$$\mathbf{E}_{\text{ind}} \text{ ist mit } \dot{\mathbf{B}} \text{ linkshändig verwirbelt gemäß: } \text{rot } \mathbf{E}_{\text{ind}} = -\dot{\mathbf{B}}$$

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Im Falle zweier Schleifenströme gilt : $\frac{di_2}{dt} + \frac{\overset{\circ}{R}_2}{L_2} i_2 = -\frac{M_{21}}{L_2} \frac{di_1}{dt}$ (7.8)

Energie des \mathbf{B} Feldes

$$P = \iiint_{\text{Draht}} \frac{1}{\kappa} \mathbf{J}^2 dV = i^2 \iiint_{\text{Draht}} \frac{dV}{\kappa a} = i^2 \oint_K \frac{ds}{\kappa a} = i^2 \overset{\circ}{R} = i \oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.11)$$

Bei einer Stromschleife : $W = \frac{1}{2} Li^2$ (7.12)

Bei (z.B) drei Stromschleifen : $W = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3$ (7.16)

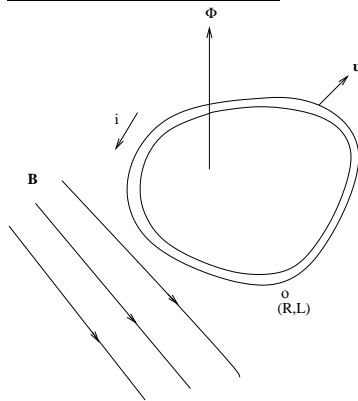
Räumliche Energiedichte : $w_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$ (7.18)

Feldenergie eines Dreischleifensystems : $W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Raum}} \mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Raum}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dV$ (7.19, 7.20)

anders ausgedrückt : $W = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \left(i_\nu \oint_{K_\nu} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_\nu \right) = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2 + i_3 \Phi_3)$ (7.21)

Bemerkung: Aus Gl. (7.12): $L = \frac{2W}{I^2}$ und Gl. (7.19): $W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \mathbf{B}^2 dV$ läßt sich die Induktivität einer Anordnung berechnen.

Bewegte Leiterschleifen



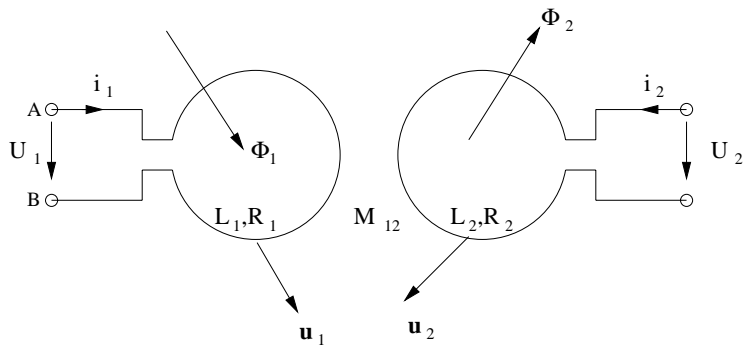
Das Ohmsche Gesetz lautet hier : $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{J}}{\kappa}$ (7.43)

Faradaysche Flußregel : $\oint (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \overset{\circ}{R} i = -\dot{\Phi} = -(\dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \dot{\Phi}^{(u)})$ (7.45)

Ändert die Schleife ihre Form, dann ist L zeitabhängig und es gilt allgemein

$$\dot{\Phi} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \dot{\Phi}_{\text{fremd}} \quad (7.47)$$

Leistungsbilanz : $P_{\text{mech}} = \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{u} = \omega \cdot \mathbf{T}$ (A 97)



$$U_1 = R_1 i_1 + \dot{\Phi}_1 = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M_{12} i_2) \quad (\text{A } 75)$$

$$U_2 = R_2 i_2 + \dot{\Phi}_2 = R_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_2 i_2 + M_{12} i_1) \quad (\text{A } 75)$$

Mit zeitabhängigen L_1, L_2, M_{12} . Bleiben die Leiterschleifen während der Bewegung geometrisch unverändert, dann ist nur M_{12} eine Funktion der Zeit. Bewegen sich die Leiterschleifen z.B. auseinander, so wird $|M_{12}|$ kleiner.

ELEKTRISCH POLARISIERBARE STOFFE

Elektrische Polarisation

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV} \quad (8.1)$$

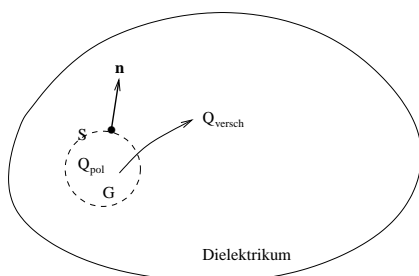
mit dem Dipolmoment : $d\mathbf{p} = dQ \mathbf{l}$ und $dQ = \varrho_0 dV$ (8.2, 8.3)

$$\Rightarrow \mathbf{P} = \varrho_0 \mathbf{l} \quad (8.4)$$

Es gilt immer (\mathbf{l} ist die Verschiebungsstrecke der Ladung) : $\mathbf{P} \uparrow \downarrow \mathbf{l}$

$$\mathbf{p} = \iiint \mathbf{P} dV \quad (\text{A 72})$$

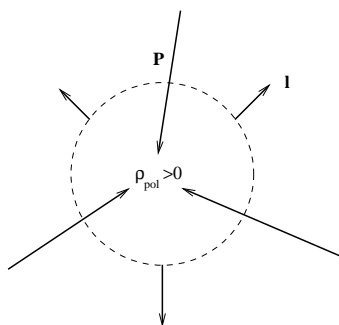
Polarisationsladungen (gebundene Ladungen !)



$$Q_{\text{pol}} = -Q_{\text{versch}} = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} \quad (8.7)$$

$\text{div } \mathbf{P} = -\varrho_{\text{pol}}$

(8.8)



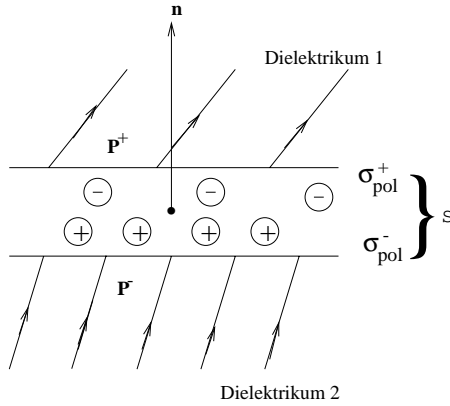
$\varrho_{\text{pol}} > 0 \rightarrow$ Senke des Feldes der Polarisation \mathbf{P} ($\varrho_{\text{pol}} < 0 \rightarrow$ Quelle von \mathbf{P})

$\sigma_{\text{pol}} = \frac{dQ_{\text{versch}}}{da} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$

(8.9)

© by Heinz Teutsch (Oktober 98)

Grenzbedingungen für den Polarisationsvektor:



$$\boxed{\text{Div } \mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-) = -\sigma_{\text{pol}}}$$
 (8.11)

Im Vakuum wie im Metall gilt: $\mathbf{P} = \mathbf{0}$

Polarisationsstrom

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} = \dot{\mathbf{P}}$$
 (8.15)

$$\text{div } \mathbf{J}_{\text{pol}} + \dot{\rho}_{\text{pol}} = 0$$
 (8.16)

Freie Ladungen und elektrische Verschiebungsdichte

Freie Ladungen: Leitungselektronen und Influenzladungen auf Metalloberflächen

Ausgehend von Gl. (3.4) und $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_{\text{pol}}$ ergibt sich:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{mag}} + \dot{\mathbf{D}}$$
 (8.22)

mit der elektrischen Verschiebungsdichte $\boxed{\mathbf{D} := \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$ (8.20)

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho_f}$$
 (8.21)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_f$$
 (8.23)

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} = -\epsilon_0 \dot{\Phi}^{(\dot{\mathbf{B}})} + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}$$
 (8.24)

Die Grenzbedingungen von \mathbf{D}

$$\boxed{\text{Div } \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-) = \sigma_f}$$
 (8.26)

$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{D} = \text{Rot } \mathbf{P} = \mathbf{n} \times (\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-)}$$
 (8.27)

Im Inneren eines stromlosen und ruhenden Metallkörpers gilt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \text{und damit} \quad \boxed{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^+ = \sigma_f} \quad (8.28)$$

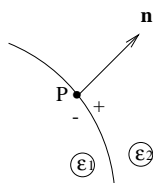
Elektrische Materialgrößen

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (\chi_e \text{ heißt elektrische Suszeptibilität}) \quad (8.31)$$

mit $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ und $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ folgt

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad (8.33)$$

Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika (Annahme: $\sigma_f = 0$)



$$\text{Div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{\text{pol}} \quad (\text{für } \sigma_f = 0) \quad (8.34)$$

$$\text{Rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0 \quad (8.35)$$

$$\text{Div } \mathbf{D} = 0 \quad (\text{für } \sigma_f = 0) \quad (8.36)$$

$$\text{Rot } \mathbf{D} = \text{Rot } \mathbf{P} \quad (8.37)$$

mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(\text{pol})} + \mathbf{E}^{(\text{außen})}$

Gln. (8.35), (8.36) können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$E_t^+ = E_t^- \quad \epsilon_2 E_n^+ = \epsilon_1 E_n^- \quad (8.38, 8.41)$$

$$D_n^+ = D_n^- \quad \epsilon_1 D_t^+ = \epsilon_2 D_t^- \quad (8.39, 8.40)$$

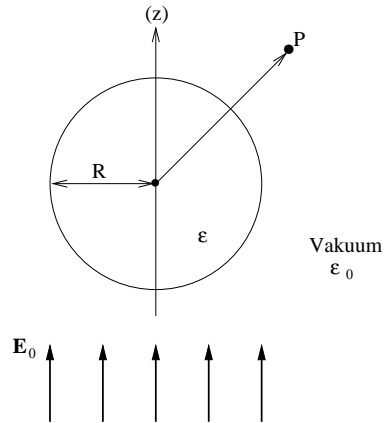
Kapazität von Kondensatoren mit dielektrischen Stoffen

$$C = \frac{Q_f}{U} \quad (8.48)$$

$$C = \frac{\epsilon a}{l} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 a}{l} = \epsilon_r C_0 \quad (8.50)$$

D.h., die Werte für die Kapazität (auch der Kapazitätskoeffizienten und der Teilkapazitäten) erhöhen sich um ϵ_r , falls der *gesamte* Feldraum mit einem Dielektrikum gefüllt wird.

Homogen polarisierte Kugel (Bsp. 8.5.2c)



Aus (8.31) folgt für die Polarisation (allg. gültig) $\boxed{\mathbf{P}_0 = (\epsilon - \epsilon_0)(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^{(\text{pol})-})}$ (A 71)

Innerhalb der Kugel gilt (Bsp. 8.2.1a) : $\mathbf{E}^{(\text{pol})} = \mathbf{E}^{(\text{pol})-} = -\frac{\mathbf{P}_0}{3\epsilon_0}$

$$\Rightarrow P_0 \mathbf{e}_z = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \mathbf{e}_z \quad (8.46)$$

Falls Kugel statt im Vakuum in einem Dielektrikum der Permittivität ϵ_1 sitzt, gilt

$$P_0 \mathbf{e}_z = 3\epsilon_1 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_1} E_0 \mathbf{e}_z \quad (\text{A 71})$$

Das \mathbf{E} Feld der Influenzladungen der Kugel im Außenraum kann durch einen fiktiven

Punktdipol $\mathbf{p} = p_z \mathbf{e}_z$ im Kugelmittelpunkt beschrieben werden gemäß :

$$p_z = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \quad (5.42)$$

MAGNETISCH POLARISIERBARE STOFFE

Magnetische Polarisation

$$\boxed{M = \frac{d\mathbf{m}}{dV}} \quad (9.1)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{m} das magnetische Dipolmoment.

Magnetisierungsströme

$$\mathbf{J}_{\text{mag}} = \text{rot } \mathbf{M} \quad (9.4)$$

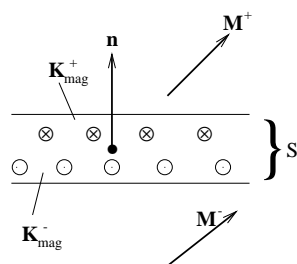
$$\text{Magnetisierungsströme sind quellenfrei : } \text{div rot } \mathbf{M} = \text{div } \mathbf{J}_{\text{mag}} = 0 \quad (9.8a)$$

$$\mathbf{K}_{\text{mag}} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (9.5)$$

$$\oint_K \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = I_{\text{mag}} \quad (9.7)$$

$$\text{Magnetisierungsstrom durch beliebige Hüllfläche : } \dot{I}_{\text{mag}} = 0 \quad (9.8b)$$

Grenzbedingung der Magnetisierung



$$\boxed{\text{Rot } \mathbf{M} = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) = \mathbf{K}_{\text{mag}}} \quad (9.6)$$

Freie Ströme und magnetische Feldstärke

$$\text{Die vierte MWG geht über in : } \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{J}_{\text{mag}} + \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} \quad (9.12)$$

$$\text{Mit (8.15), (8.20) und (9.4) ergibt sich : } \boxed{\text{rot } \left(\underbrace{\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}}_{:= \mathbf{H}} \right) = \mathbf{J}_f + \dot{\mathbf{D}}} \quad (9.13 - 9.15)$$

In integraler Form ergibt sich :
$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_f + \iint_S \dot{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\text{statisch}}{=} I_f \quad (9.16)$$

Grenzbedingungen von \mathbf{H}

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{K}_f \quad (9.19)$$

$$\text{Div } \mathbf{H} = -\text{Div } \mathbf{M} = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}^-) \quad (9.20)$$

Magnetische Materialgrößen

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (\chi_m \text{ heißt magnetische Suszeptibilität}) \quad (9.24b)$$

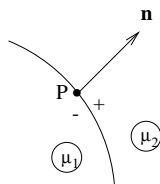
$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \quad \text{mit } \mu_r = 1 + \chi_m \quad \text{und } \mu = \mu_r \mu_0 \quad (9.25)$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}} \quad (\text{Gesamtfelder!}) \quad (9.26)$$

$$\text{Permanente Magnetisierung : } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{A 74})$$

Es gilt: homogenes \mathbf{M} \Leftrightarrow inhomogenes \mathbf{B}_{mag} (vgl. Bild 9.9)

Grenzflächen zwischen verschiedenen permeablen Bereichen



$$\text{Div } \mathbf{H} = -\text{Div } \mathbf{M} \quad (9.27)$$

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} \cdot (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = 0 \quad (\text{für } \mathbf{K}_f = \mathbf{0}) \quad (9.28)$$

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (9.29)$$

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{K}_{\text{mag}} + \mathbf{K}_f) \stackrel{\mathbf{K}_f=0}{=} \mu_0 \mathbf{K}_{\text{mag}} \quad (9.30)$$

Gln. (9.28), (9.29) können auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$H_t^+ = H_t^- \quad \mu_2 H_n^+ = \mu_1 H_n^- \quad (9.31, 9.34)$$

$$B_n^+ = B_n^- \quad \mu_1 B_t^+ = \mu_2 B_t^- \quad (9.32, 9.33)$$

Weitere Formeln

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{H} = \kappa \mathbf{E}} \quad (9.42)$$

Von dieser *Hauptgleichung der Elektrodynamik* geht man in (ruhenden) ohmschen Leitern auch unter dynamischen Bedingungen aus.

$$\boxed{\mathbf{J}_{\text{mag}} = (\mu_r - 1) \mathbf{J}_f = (\mu_r - 1) \kappa \mathbf{E}} \quad (9.43)$$

Induktivität von Spulen mit hochpermeablen Stoffen

Es bezeichne L_0 die Induktivität einer Spule im leeren Raum. Dieser Wert ändert sich (wie auch die Werte der Induktivitätskoeffizienten bei Mehrschleifensystemen), wenn der *ganze* Feldraum mit einem *hochpermeablen* Stoff (μ_r) erfüllt wird. Es ergibt sich :

$$\boxed{L = \mu_r L_0} \quad (9.41)$$

Die Maxwell-Gleichungen mit \mathbf{D} und \mathbf{H}

Mit den Hilfsfeldern $\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}$ und $\boxed{\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}}$ (9.44, 9.45)

ergibt sich :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_f \quad (9.46)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (9.47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.48)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \dot{\mathbf{D}} \quad (9.49)$$

mit den Grenzbedingungen :

$$\operatorname{Div} \mathbf{D} = \sigma_f \quad (9.50)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (9.51)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.52)$$

$$\operatorname{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{K}_f \quad (9.53)$$

und den Materialgleichungen :

$$\mathbf{J}_f = \kappa(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (9.54)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (9.55)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.56)$$

Gln. (9.55) und (9.56) setzen ruhende Medien voraus. Bei selbst kleinen Materialgeschwindigkeiten müssen sie folgendermaßen modifiziert werden :

$$\mathbf{D} = \epsilon \left[\mathbf{E} + \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right] \quad (9.57)$$

$$\mathbf{B} = \mu \left[\mathbf{H} - \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r \mu_r} \right) \mathbf{u} \times \mathbf{D} \right] \quad (9.58)$$

ELEKTROMAGNETISCHE ENERGIEBILANZ

$$\text{Elektrische Energiedichte : } w_E = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (4.53)$$

$$\text{Magnetische Energiedichte : } w_B = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \quad (7.18)$$

Elektrische Leistungsdichte

$$p_e = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.6)$$

$$\text{Mit Gl. (8.20) ergibt sich : } p_e = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial(\mathbf{E}^2)}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (10.7)$$

$$\text{Und schließlich mit Gln. (4.53), (8.15) : } \boxed{p_e = \dot{w}_E + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{pol}}} \quad (10.8)$$

Aussage: Mit der einem Volumenelement im Dielektrikum zugeführten Leistung wird dort der Energieinhalt des \mathbf{E} Feldes geändert und Polarisationsarbeit geleistet.

Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika

$$\text{Lineare Dielektrika gehorchen der Beziehung : } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (10.13)$$

$$\text{Gespeicherte elektrische Energie : } W_e = \iiint_G \underbrace{\left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right)}_{w_e} dV \quad (10.14)$$

$$\boxed{w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}} \quad (10.17)$$

Gl. (10.17) wurde gegenüber Gl. (4.53) um den rechten Summanden erweitert, da die Erhöhung der Polarisation Energie kostet.

$$\text{Energie eines mit Dielektrika gefüllten Kondensators : } W_e = \frac{1}{2} Q_f U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C} \quad (10.18)$$

Generell gilt: Die elektrische Energiedichte in einem Dielektrikum ist um das ϵ_r - fache *größer* als im Vakuum bei gleicher elektrischer Feldstärke.

Magnetische Leistungsdichte

$$p_m = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.25)$$

$$\boxed{p_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \dot{w}_B + \mathbf{M} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \dot{w}_B + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{mag}}} \quad (10.26)$$

Aussage: Mit der einem magnetisierbaren Körper insgesamt zugeführten Leistung wird der Energieinhalt des \mathbf{B} Feldes geändert und Magnetisierungsarbeit geleistet.

Gespeicherte Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe

Im linearen Bereich der Hysteresekurve gilt : $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (10.36)

$$w_m = \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (10.37)$$

Energie einer gefüllten Spule : $W_m = \frac{1}{2} i_f \Phi = \frac{1}{2} L i_f^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$ (10.38)

Mit Φ ist der gesamte von i_f (rechtshändig) umfaßte Spulenfluß gemeint und nicht nur ein Querschnittsfluß.

Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

Gesamte zugeführte Leistungsdichte : $p_{\text{ges}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (10.39)

mit dem Poynting-Vektor $\mathbf{S} := \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (10.45)

folgt $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \text{div} \mathbf{S} = -\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ (10.46)

Das Minuszeichen tritt auf, da die Flächennormale nach *außen* gerichtet sein soll.

Eine andere Schreibweise der elektromagnetischen Energiebilanz lautet :

$$\text{div}\left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right) = -\mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \mathbf{J}_{\text{mag}}\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\right) \quad (10.48)$$

Lokale Energiebilanz : $\text{div} \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_b + w_{\text{ohmsch}})$ (A 86)

Energiestrom (Leistungstransport) durch eine Querschnittsfläche :

$$P = \iint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (A 78)$$

RETARDIERTE LÖSUNGEN DER MWG

Allgemeine homogene Wellengleichungen

Eine eindimensionale entlang der z-Achse laufende Welle gehorcht der DGL :

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \ddot{w} = 0 \quad (11.3)$$

Als Lösung ergibt sich :

$$w(z, t) = \underbrace{f\left(t - \frac{z}{c}\right)}_{\text{in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{g\left(t + \frac{z}{c}\right)}_{\text{entgegen } z\text{-Richtung}} \quad (11.1)$$

Eine mehrdimensionale Welle gehorcht entsprechend der DGL :

$$\nabla^2 \mathbf{w} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \quad (11.4)$$

Inhomogene Wellengleichung für \mathbf{E} und \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (11.13)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \dot{\mathbf{A}} \quad (11.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \varrho + \mu_0 \dot{\mathbf{J}} \quad (11.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{B}} = -\mu_0 \text{rot } \mathbf{J} \quad (11.11)$$

$$\text{Beide Gleichungen sind miteinander gekoppelt gemäß : } \text{div } \mathbf{J} = -\dot{\varrho} \quad (11.12)$$

Inhomogene Wellengleichungen für dynamische Potentiale

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\mathbf{A}} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (11.18)$$

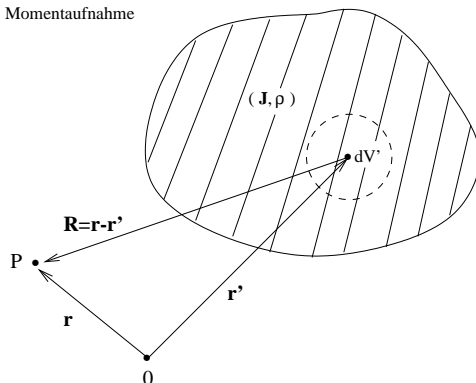
$$\text{mit der sog. Lorentz-Bedingung : } \text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c_0^2} \dot{\varphi} \quad (11.17)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\varphi} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \quad (11.19)$$

In Gln. (11.18) und (11.19) dürfen \mathbf{J} und ϱ nicht beliebig gewählt werden, denn sie müssen der Kontinuitätsgleichung (11.12) genügen.

Retardierte Potentiale

Momentaufnahme



$$t^* = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \quad (11.20)$$

Eine von dV' kommende Größe müßte zur *retardierten Zeit* t^* gesendet worden sein, damit sie zur Zeit t am Punkt P ankommt.

Damit ergeben sich folgende *retardierte Potentiale* :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.21)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.22)$$

und die *retardierten* Lösungen der Maxwell-Gleichungen :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{\varrho(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.49a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t^*)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (11.49b)$$

Andere Darstellung :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[\varrho + \frac{R}{c_0} \dot{\varrho} \right]^* \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\mathbf{j}]^* \frac{1}{R} dV' \quad (11.50a)$$

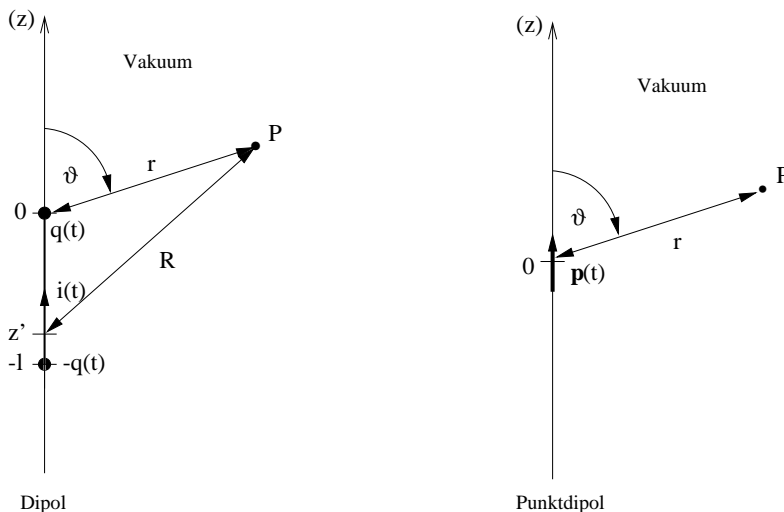
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\mathbf{J} + \frac{R}{c_0} \dot{\mathbf{j}} \right]^* \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (11.50b)$$

Dabei ist Gl. (11.50b) die dynamische Verallgemeinerung der Biot-Savart Formel.

Vektorpotential eines Linienstroms entlang der z -Achse (R : Abstand $P \rightarrow z'$) :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(t^*)}{R} dz' \mathbf{e}_z \quad (11.58)$$

Zeitveränderlicher Dipol (Hertzscher Dipol)



$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(z', t^*) dz'}{R} \mathbf{e}_z \stackrel{\text{hier}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l}^0 \frac{i(t^*) dz'}{R} \mathbf{e}_z \quad (11.65, 11.66)$$

$$\text{mit } p_z(t) = q(t) l \quad \rightarrow \quad \dot{p}_z(t) = i(t) l \quad (11.64)$$

Nach Übergang zum Punktdipol ergibt sich :

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0 \dot{p}_z(t_0^*)}{4\pi r} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 \dot{p}_z(t_0^*)}{4\pi r} (\cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \quad (11.68)$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{p}_z}{r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.70)$$

Der Klammerausdruck ist zur retardierten Zeit $t_0^* = t \Leftrightarrow r/c_0$ zu nehmen.

$$\text{Mit } \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \mathbf{B}$$

folgt :

$$E_r(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta \quad (11.71a)$$

$$E_\vartheta(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta \quad (11.71b)$$

$$E_\alpha(P, t) = 0 \quad (11.71c)$$

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^2} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \cos \vartheta \quad (11.85)$$

Zeitharmonisches Dipolmoment

Ein Hertzscher Dipol schwingt gemäß $p_z(t) = \hat{p}_z \sin \omega t$, $t > 0$ (11.74)

mit $t_0^* = t - \frac{r}{c_0}$
 und $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$ (11.76)

erhält man die nichtverschwindenden Komponenten des elektromagnetischen Feldes :

$$E_r(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\sin(\omega t_0^*) + kr \cos(\omega t_0^*) \right] 2 \cos \vartheta \quad (11.77a)$$

$$E_\vartheta(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\sin(\omega t_0^*) + kr \cos(\omega t_0^*) - k^2 r^2 \sin(\omega t_0^*) \right] \sin \vartheta \quad (11.77b)$$

$$B_\alpha(r, t) = \frac{\hat{p}_z}{4\pi\epsilon_0 c_0 r^3} \left[kr \cos(\omega t_0^*) - k^2 r^2 \sin(\omega t_0^*) \right] \sin \vartheta \quad (11.77c)$$

In der sog. *Nahzone* ($2\pi r \ll \lambda$) gilt :

$$\mathbf{E}(P, t) = \frac{\hat{p}_z \sin \omega t}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \mathbf{e}_r + \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) \quad (11.78a)$$

$$\mathbf{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \omega \hat{p}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.78b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 i(t) l \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (11.79)$$

In der sog. *Fernzone* ($2\pi r \gg \lambda$) gilt :

$$\mathbf{E} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi\epsilon_0 c_0^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (11.80a)$$

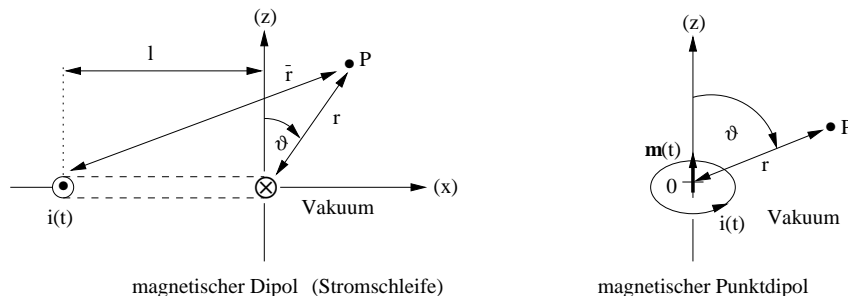
$$\mathbf{B} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi\epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\alpha \quad (11.80b)$$

Für den Poytning-Vektor erhält man in der Fernzone :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\omega^4 \hat{p}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*) \sin^2 \vartheta}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c_0^3} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.81)$$

Die Energie wird bevorzugt in der Ebene $\vartheta = \pi/2$ abgestrahlt

Zeitveränderlicher magnetischer Dipol (Fitzgeraldscher Dipol)



$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{i(t_0^*)}{r} - \frac{i(\bar{t}^*)}{\bar{r}} \right] l \mathbf{e}_y \quad (11.86)$$

mit $t_0^* = t - \frac{r}{c_0}$ und $\bar{t}^* = t - \frac{\bar{r}}{c_0}$

Nach Übergang zum Punktdipol ($r \gg l$ bzw. $l \rightarrow 0, il^2 = m_z = \text{const}$) ergibt sich

$$\mathbf{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^2} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.87)$$

$$\mathbf{E}(P, t) \stackrel{\text{allg.}}{=} -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \stackrel{\text{hier: } \varphi=0}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{m}_z}{r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \mathbf{e}_\alpha \quad (11.88)$$

$$B_r(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta \quad (11.89a)$$

$$B_\vartheta(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta \quad (11.89b)$$

$$B_\alpha(P, t) = 0 \quad (11.89c)$$

Zeitharmonisches Dipolmoment

Ein Fitzgeraldscher Dipol schwinge gemäß $m_z(t) = \hat{m}_z \sin \omega t$, $t > 0$ (11.90)

Insbesondere in der *Fernzone* ($2\pi r \gg \lambda$) gilt (Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0}$):

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (11.92a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{c_0 \mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\alpha \quad (11.92b)$$

Für den Poynting-Vektor erhält man in der Fernzone

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega^4 \hat{m}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*) \sin^2 \vartheta}{(4\pi)^2 c_0^3} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.93)$$

Energie wird also mit einer zu ω^4 proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene $\vartheta = \pi/2$.

Bem.: Liegen in einer Anordnung sowohl unkompensierte Ladungen als auch Stromschleifen vor, so muß man Gln. (11.80) und (11.92) entsprechend kombinieren.

Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen

Die Wellengleichungen nehmen mit $\epsilon\mu = \epsilon_r\mu_r/c_0^2$ folgende Form an :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r\mu_r}{c_0^2} \ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \text{grad } \varrho_f + \mu_r \dot{\mathbf{J}}_f \quad (11.98)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\epsilon_r\mu_r}{c_0^2} \ddot{\mathbf{B}} = -\mu \text{rot } \mathbf{J}_f \quad (11.99)$$

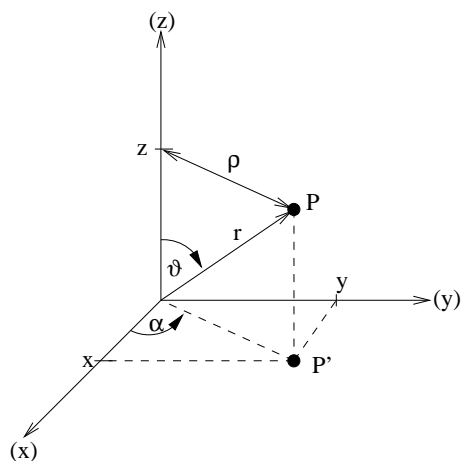
$$\text{Mit : } c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (11.100)$$

Der Geschwindigkeitsparameter ist also kleiner als im Vakuum, wo

$c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ gilt.

In einem reinem Dielektrikum setzt man $\varrho_f = 0, \mathbf{J}_f = \mathbf{0}$ und $\mu_r = 1$. Für das betrachtete Dielektrikum gilt also : $\frac{c_0}{c} = \sqrt{\epsilon_r} = n$ (n: Brechungsindex)

ANHANG: KOORDINATENSYSTEME



Dabei sind $\left. \begin{array}{l} x, y, z \text{ kartesische} \\ \varrho, \alpha, z \text{ zylindrische} \\ r, \vartheta, \alpha \text{ sphärische} \end{array} \right\} \text{Koordinaten von P}$

Ortsvektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen

Kartesische Koordinaten : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zylindrische Koordinaten : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \alpha \\ \varrho \sin \alpha \\ z \end{pmatrix}$

Sphärische Koordinaten : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \alpha \\ r \sin \vartheta \sin \alpha \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$

mit : $r > 0, \varrho < \infty, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$