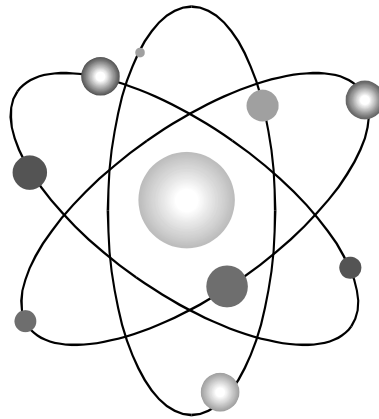


Formelsammlung

T E D Y



Verfaßt von

Dieter Braisch

© Frühling 1997

überarbeitet von Wilko Kraß

Herbst 1997 und Sommer 1998

***Elektrotechnische
Gruppe
Kurzschluß***
ETG 

The logo graphic consists of two large, bold, grey arrows. One arrow points upwards and to the right, while the other points downwards and to the left, creating a sense of dynamic movement or a cycle.

Keine Gewähr für den Inhalt und evtl. Fehler !
Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an Wilko.Krass@stud.uni-erlangen.de

1. Vektoranalytische Hilfsmittel

Niveauflächen und Feldlinien $\vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r} = \vec{0}$, Parallelität von $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ und $d\mathbf{r}$ (1.1, S.3)
 Pfeilrichtung der Feldlinien nicht vergessen !

Gradient $grad U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$, and. 1.56, S.46 (1.5, S.6)

Gradienteneigenschaft $dU = (grad U) \cdot d\vec{r}$ (1.4, S.6)

Fluß durch die Fläche S $\Psi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$ (1.9, S.8)

Ergiebigkeit $\Psi = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{a}$ Vorzeichen des Integrals sagt über Quellen oder Senken aus (1.10, S.11)

Divergenz $div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} = \lim_{V \rightarrow \vec{r}} \frac{\Psi}{V}$, Def. 1.11a, and. 1.57, S.46 (1.12, S.14)

Satz von Gauß $\oiint_S \vec{F} d\vec{a} = \iiint_G div \vec{F} dV$ Hüllintegrale und Raumintegrale verknüpft (1.14a, S.18)

Dreidimensionale Deltafunktion: $\delta(r) := \delta(x)\delta(y)\delta(z)$
 $\iiint_G \delta(r) dV = \{1, \text{ falls Ursprung enthalten, } 0 \text{ sonst}\}$ (1.17, S.20)
 $div(grad \frac{1}{r}) = div(-\frac{\vec{r}}{r^3}) = -4\pi\delta(r)$

Sätze von Green

1. $\oiint_S (U_1 \nabla U_2) \cdot d\vec{a} = \iiint_G [U_1 \nabla^2 U_2 + (\nabla U_1) \cdot (\nabla U_2)] dV$ (1.23, S.21)

Spezialfall: $U_1 = 1$ und $U_2 = U$
 $\oiint_S (\nabla U) \cdot d\vec{a} = \iiint_G (\nabla^2 U) dV$ (1.25, S.22)

2. $\oiint_S (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) \cdot d\vec{a} = \iiint_G (U_1 \nabla^2 U_2 - U_2 \nabla^2 U_1) dV$ (1.24, S.22)

Spezialfall: $U_1 = U_2 = U$
 $\oiint_S (U \nabla U) \cdot d\vec{a} = \iiint_G [U \nabla^2 U + (\nabla U)^2] dV$ (1.26, S.22)

Satz von Gauß für den Gradienten $\iiint_G (grad U) dV = \oiint_S U d\vec{a}$ (1.27, S.22)

Zirkulation $Z = \oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ist eine skalare Größe (1.29, S.24)

Rotation $rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}) \vec{e}_x - (\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}) \vec{e}_y + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \vec{e}_z$ (1.32, S.27)
 Def. 1.30a, Rotation und Zirkulation 1.30c, and. 1.58, S.46

Satz von Stokes	$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{a}$ Kurven- und Flächenintegrale	(1.35a, S.32)
------------------------	---	---------------

Verschiedenes: Formeln nach S.33ff

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{grad} U_2 + U_2 \text{grad} U_1 \quad (1.36a, S.33) \quad \text{div}(U\vec{F}) = U \text{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad} U \quad (1.36b, S.33)$$

$$\text{div}(\vec{F}_1 \times \vec{F}_2) = \vec{F}_2 \cdot \text{rot} \vec{F}_1 - \vec{F}_1 \cdot \text{rot} \vec{F}_2 \quad (1.36c, S.33) \quad \text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad} U \quad (1.36d, S.33)$$

$$\nabla^2 \vec{F} = \text{grad}(\text{div} \vec{F}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{F}) \quad (1.36e, S.33)$$

Richtungsableitung, Punktdipolformeln für Kraft und Drehmoment

$$(\vec{G} \cdot \nabla) U = \vec{G} \cdot \text{grad} U \quad (1.36f, S.33)$$

$$\begin{aligned} (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} &= (\vec{G} \cdot \text{grad} F_x) \vec{e}_x + (\vec{G} \cdot \text{grad} F_y) \vec{e}_y + (\vec{G} \cdot \text{grad} F_z) \vec{e}_z \\ &= G_x \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + G_y \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + G_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.36g, S.33)$$

$$= G_\rho \frac{\partial \vec{F}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} G_\alpha \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha} + G_z \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \quad \text{auch Einheitsvektoren ableiten !} \quad (1.60a, S.47)$$

$$= G_r \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} G_\vartheta \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} G_\alpha \frac{\partial \vec{F}}{\partial \alpha} \quad \text{auch Einheitsvektoren ableiten !} \quad (1.60b, S.47)$$

$$2(\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} = \text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) + \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) - \vec{F} \text{div} \vec{G} + \vec{G} \text{div} \vec{F} - \vec{F} \times \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \times \text{rot} \vec{F} \quad (1.36h, S.33)$$

Seltenes:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times \text{rot} \vec{G} + \vec{G} \times \text{rot} \vec{F} \\ (\vec{G} \cdot \nabla) U \vec{F} &= \vec{F} (\vec{G} \cdot \text{grad} U) + U (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} \end{aligned} \quad (1.36i-k, S.34)$$

$$\text{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + \vec{F} \text{div} \vec{G} - \vec{G} \text{div} \vec{F}$$

Gradientenfelder sind wirbelfrei	$\text{rot}(\text{grad} U) = \vec{0}$	$\oint (\text{grad} U) \cdot d\vec{r} = 0$	$\oint dU = 0$	(1.37-38, S.34)
----------------------------------	---------------------------------------	--	----------------	-----------------

Rotorfelder sind quellenfrei	$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$	$\oiint (\text{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{a} = 0$		(1.39-40, S.26)
------------------------------	--------------------------------------	--	--	-----------------

Satz von Gauß für die Rotation	$\iiint \text{rot} \vec{F} dV = \oiint (\vec{n} \times \vec{F}) da = -\oiint \vec{F} \times d\vec{a}$	(1.41, S.36)
---------------------------------------	---	--------------

Skalares Potential $\vec{F} = -\text{grad} U$ F: Gradientenfeld (1.43, S.37)

$$U(P) = -\int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\int_{x_0}^x F_x(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_y(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_z(x, y, t) dt \right)$$

Notwendige Bedingungen für die Existenz des skalaren Potentials zum Vektorfeld **F**

global wirbelfrei (ist auch hinreichende Bedingung), d.h.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{für jede geschlossene Kurve oder wenn } U \text{ bestimmbar} \quad (1.44, S.37)$$

als auch **lokal wirbelfrei**, d.h.

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \text{in allen Feldpunkten} \quad (1.45, S.37)$$

hinreichende Bedingung wenn das Gebiet *einfach zusammenhängend* (Def. S.38, 39) ist.

Divergenz und Rotation als wesentliche Bestimmungsstücke eines Vektorfeldes

Eindeutigkeitssatz (S.41):

Gegeben: $u(\vec{r})$ skalare Funktion, $\vec{w}(\vec{r})$ vektorielle Funktion, $f(\vec{r})$ berandende Oberfläche S

dann hat das folgende Gleichungssystem höchstens eine Lösung \vec{F} :

$$\operatorname{div}\vec{F} = u \quad (\text{in } G), \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{w} \quad (\text{in } G), \quad \vec{F} \cdot \vec{n} = f \quad (\text{auf } S) \quad (1.47, \text{ S. 41})$$

Poissonsche Differentialgleichung (S.42, partikuläre Lösung von 1.47a,b)

$$\nabla^2 \vec{F} = \operatorname{grad} u - \operatorname{rot} \vec{w} = \vec{g} \quad \text{vektorielle Poissongleichung} \quad (1.50a, \text{ S.42})$$

Vektoranalytische Operationen und Hilfsmittel

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha \quad (1.56a,b, \text{ S.46})$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} \right] \quad (1.57a,b, \text{ S.46})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} \right] \vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right] \vec{e}_\alpha + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\alpha) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \alpha} \right] \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (F_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\alpha) \right] \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\alpha \end{aligned} \quad (1.58a,b, \text{ S.46})$$

$$\nabla^2 U = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \nabla \cdot (\nabla U) \quad (1.20, 1.21, \text{ S. 21}) \quad \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.19, \text{ S.21})$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.59a, \text{ S.47})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} \right] \end{aligned} \quad (1.59b,c, \text{ S.47})$$

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x) \vec{e}_x + (\nabla^2 F_y) \vec{e}_y + (\nabla^2 F_z) \vec{e}_z \quad (1.22, \text{ S.21})$$

Totales Differential S. 47

Nützliche Formeln

Siehe Buch S. 49ff

Umfangsgeschwindigkeit: $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad O = 4\pi R^2$

Die folgende Tabelle entstammt teilweise dem Buch aber auch dem Bronstein S.564 ff.

Zylinderkoordinaten	$\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z\}$	Kugelkoordinaten	$\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\alpha\}$
$\vec{e}_\rho = \sin\vartheta \vec{e}_r + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_z$		$\vec{e}_r = \sin\vartheta \vec{e}_\rho + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta \vec{e}_\rho - \sin\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha$	
$\rho = r \sin\vartheta$ $\alpha = \alpha$ $z = r \cos\vartheta$		$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ u. a.: $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \sin\vartheta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$ $\alpha = \alpha$	
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ α aus Dreiecksbeziehungen ! $z = z$		$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ u. a.: $\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ α aus Dreiecksbeziehungen	
$\vec{e}_\rho = \cos\alpha \vec{e}_x + \sin\alpha \vec{e}_y$ $\vec{e}_\alpha = -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y$ $\vec{e}_z = \vec{e}_z$		$\vec{e}_r = \sin\vartheta \cos\alpha \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\alpha \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z$ $\vec{e}_\vartheta = \cos\vartheta \cos\alpha \vec{e}_x + \cos\vartheta \sin\alpha \vec{e}_y - \sin\vartheta \vec{e}_z$ (1.51, S.44) $\vec{e}_\alpha = -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y$	
$x = \rho \cos\alpha$ $y = \rho \sin\alpha$ $z = z$		$x = r \sin\vartheta \cos\alpha$ $y = r \sin\vartheta \sin\alpha$ $z = r \cos\vartheta$	
$\vec{e}_x = \cos\alpha \vec{e}_\rho - \sin\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_y = \sin\alpha \vec{e}_\rho + \cos\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \vec{e}_z$		$\vec{e}_x = \sin\vartheta \cos\alpha \vec{e}_r + \cos\vartheta \cos\alpha \vec{e}_\vartheta - \sin\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_y = \sin\vartheta \sin\alpha \vec{e}_r + \cos\vartheta \sin\alpha \vec{e}_\vartheta + \cos\alpha \vec{e}_\alpha$ $\vec{e}_z = \cos\vartheta \vec{e}_r - \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$	
$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \rho} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial \alpha} = \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\vec{e}_\rho$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \alpha} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$	
	(1.52, S.44)		
$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial r} = 0$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial r} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \vartheta} = \vec{e}_\vartheta$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\vec{e}_r$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \vartheta} = 0$	$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \alpha} = \sin\vartheta \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\vartheta}{\partial \alpha} = \cos\vartheta \vec{e}_\alpha$ $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\sin\vartheta \vec{e}_r - \cos\vartheta \vec{e}_\vartheta$	
	(1.52, S.44)		
$d\vec{r} = (d\rho) \vec{e}_\rho + (\rho d\alpha) \vec{e}_\alpha + (dz) \vec{e}_z$ (1.53a, S.44) $d\vec{a} = \rho d\alpha dz \vec{e}_\rho$ (1.55a-c, S.46) bzw. $d\rho dz \vec{e}_\alpha$ bzw. $\rho d\rho d\alpha \vec{e}_z$ (1.54a, S.45) $dV = \rho d\rho d\alpha dz$		$d\vec{r} = (dr) \vec{e}_r + (r d\vartheta) \vec{e}_\vartheta + (r \sin\vartheta d\alpha) \vec{e}_\alpha$ (1.53b, S.45) $d\vec{a} = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\alpha \vec{e}_r$ (1.54d-e, S.46) bzw. $r \sin\vartheta dr d\alpha \vec{e}_\vartheta$ bzw. $r dr d\vartheta \vec{e}_\alpha$ (1.54b, S.46) $dV = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta da$	

Vorsicht: Die Ursprünge der Koordinatensysteme müssen zusammenfallen und wie üblich ausgerichtet sein ! Viele der Beziehungen können durch eine Zeichnung schnell hergeleitet werden !

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$

Doppeltes Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$ γ liegt c gegenüber

2. Ladung, Strom und EM-Feld

Coulombsches Gesetz

2 Ladungen: $\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{21} = -\vec{F}_2$ (2.5a,b, S.54)

3 Ladungen $\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}^2} \vec{e}_{13} + \frac{q_2}{r_{23}^2} \vec{e}_{23} \right)$ usw. (S.54 unten)

Gilt nur für ruhende Punktladungen, Coulombsche Kräfte gehorchen dem Superpositionsprinzip

Ladungsdichten Raumladung $\rho(r) = \frac{dQ}{dV}$ $Q = \iiint_G \rho dV$ (2.6a,b, S.55)

Flächenladung $\sigma(r) = \frac{dQ}{da}$ $Q = \iint_S \sigma da$ (2.7a,b, S.56)

Linienladung $\tau(r) = \frac{dQ}{ds}$ $Q = \int_K \tau ds$ (2.8a,b, S.56)

Kraft einer unendlichen Linienladung auf eine Ladung $\vec{F}_q = q \frac{\tau}{2\pi\epsilon\rho} \vec{e}_\rho$ (2.9, S.58)

dq-Ansatz: $dq = \tau ds = \sigma da = \rho dV = idt \dots$

Strom $I = \frac{dQ}{dt}$ (S.58 Mitte)

Stromdichten nur bei Elektronen $\vec{J} = -en\vec{u}_- = \rho_- \vec{u}_-$ (2.11a, S.60)

$\vec{J} = \rho_+ \vec{u}_+ + \rho_- \vec{u}_-$ (2.11b, S.60) $dI = \vec{J} \cdot \vec{n} da$ (2.13b, S.61) $I = \iint_S \vec{J} d\vec{a}$ (2.12, S.60)

$\vec{K} = \sigma_+ \vec{u}_+ + \sigma_- \vec{u}_-$ (2.15, S.61) $dI = \vec{K} \cdot \vec{t} ds$ (2.16, S.62) $I = \int_K \vec{K} \cdot \vec{t} \cdot ds$

$i = \tau_+ u_+ + \tau_- u_-$ falls J homogen und parallel zu n ist, gilt: $\vec{J} = \frac{I}{a} \vec{n}$ (2.14, S.61)

Ampèresches Gesetz $\frac{\Delta \vec{F}_1}{\Delta s} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{\rho_{12}} \vec{e}_{21} = -\frac{\Delta \vec{F}_2}{\Delta s}$ (2.17a,b, S.65)

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ (2.18c, S.65) $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c_0^2$ (2.21, S.65)

Kontinuitätsgleichung

global $\frac{dQ}{dt} = -I$ (2.22, S.66) lokal $div \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (2.23, S.67)

Anwendung z.B. bei punktueller Vorgehensweise, wie in Bsp.2.3.1a, S.67 (Dipolantenne)

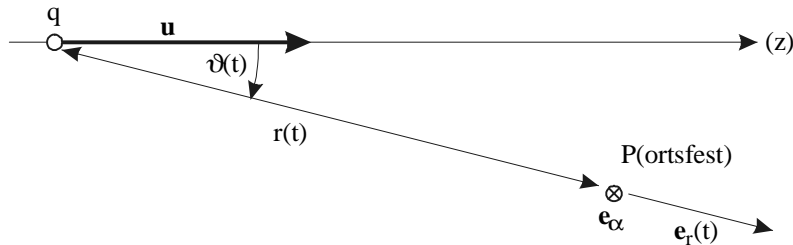
Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \quad \text{Kraft auf eine bewegte Punktladung} \quad (2.24, S.71)$$

dF- Ansatz mit $dq \cdot \vec{u} = i \cdot d\vec{r} = \vec{K} \cdot da = \vec{J} \cdot dV = \rho dV \cdot \vec{u}$ **Stromelementformen**

EM-Feld gleichförmig bewegter Punktladungen

Bild 2.16



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \vec{e}_r \quad (2.25, S.73) \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c_0^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c_0^2} \sin^2 \vartheta}} \vec{u} \times \vec{e}_r \quad (2.26, S.73)$$

wenn $\vec{u} = \vec{0}$ $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ $\vec{B} = \vec{0}$ (2.27, S.73)

wenn $\vec{u} \ll c_0$ $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 q u_z \sin \vartheta}{4\pi r^2} \vec{e}_\alpha = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \vec{u} \times \vec{e}_r$ (2.28, S.73)

diese Näherung erfüllt nicht immer die Maxwellgleichungen, vor allem 3.2. nicht

Fazit: $\vec{B} = \frac{1}{c_0^2} \vec{u} \times \vec{E}$ *solange Bewegung gleichförmig* **B** senkr. zu **E** (2.29, S.75)

relativistische Kraftwirkung zweier bewegter Teilchen siehe Buch S. 75, 76 (2.30, S.75)

Abhängigkeit der Feldgrößen vom Bezugssystem (S.80f)

Lorentz-Transformation mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c_0^2}}}$ (2.32, S.81)

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \gamma(z - u_0 t) \quad t' = \gamma \left(t - \frac{u_0}{c_0^2} z \right) \quad (2.35, S.81)$$

wenn $\frac{u_0^2}{c_0^2} \ll 1$ d.h. $\gamma \approx 1$ $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u}_0 \times \vec{B}$ $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \vec{u}_0 \times \vec{E}$ (2.34a,b, S.81)

Die Werte von **E** und **B** hängen davon ab, in welchem Bezugssystem sie gemessen werden.

Die Transformation erfolgt allgemein für **E**, **B** und **J** nach (S.80, S.81)

3. Maxwell'sche Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (3.1, \text{S.82}) \quad \oiint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_G \rho(\vec{r}, t) dV = \frac{Q(t)}{\epsilon_0} \quad (3.41a,b, \text{S.105})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3.2, \text{S.82}) \quad \oint_K \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = -\iint_S \dot{\vec{B}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} \quad (3.42a, \text{S.106})$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.3, \text{S.82}) \quad \oiint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} = 0 \quad (3.43, \text{S.106})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[\vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \right] \quad (3.4, \text{S.82})$$

$$\oint_K \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left[\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \epsilon_0 \iint_S \dot{\vec{E}}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} \right] \quad (3.44a, \text{S.106})$$

„**E** und **B** sind Vakuumgrößen; das Superpositionsprinzip ist eine Konsequenz der Linearität“

Quellen von E

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{wenn } q \subset S \\ 0 & \text{wenn } q \supset S \end{cases} \quad (3.5, \text{S.83}) \quad \text{Wichtig: } \operatorname{div}(\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}) = 0 \quad (3.8, \text{S.85})$$

Wirbel von B

Gesetz von Biot-Savart $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ (3.10, S.87)

Es gibt keine **B**-Komponenten parallel zu **i** ! Gesetz gilt nur im statischen und quasistationärem Fall !!

Ampere-Feld eines Drahtes endlicher Länge

$$\Delta \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \vec{e}_\alpha$$

und unendlicher Länge

$$z_1 \rightarrow -\infty, z_2 \rightarrow \infty$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha \quad (3.11a,b, \text{S.88})$$

Unendliche Flächenladung (x-y-Ebene)

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad z >, < 0 \quad (3.70, \text{S.120})$$

Unendlicher Flächenstrom (x-y-Ebene, y-Richtg)

$$\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 K_y}{2} \vec{e}_x \quad z >, < 0 \quad (3.45, \text{S.112})$$

Vektorpotential $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ (3.14a, S.89) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_K \frac{\vec{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$ (3.14b, S.89)

$\operatorname{div} \vec{A} = 0$ (3.18, S.89) $\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ (3.15, S.89)

für einen linienförmigen, geschlossenen Gleichstrom gilt:

$\nabla^2 \vec{A} = 0$ (3.19, S.90) $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$ (3.20a, S.90)

Durchflutungsgesetz (S.93-95)

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (3.26, \text{S.95}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.27, \text{S.95})$$

Dieses Gesetz ist nicht richtig !! Aus ihm entstand Maxwell 4 s.o.; Ergebnis der Betrachtungen: **B** hat genau dort Wirbel, wo Ströme fließen und elektrische Felder sich zeitlich ändern. Vorsicht: Widerspricht auch endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit !

Quellen von B	$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0$ (3.30, S.97)	$\text{div} \vec{B} = 0$ (3.31, S.97)
Es gibt keine magnetischen Ladungen !		

Wirbel von E

Magnetischer Fluß $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$ (3.32, S.97)

$$\dot{\Phi} = \iint_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a} - \oint_K (\vec{u}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})) \cdot d\vec{r} = \dot{\Phi}^{(B)} + \dot{\Phi}^{(u)}$$
 (3.33, S.99)

wenn **B** sich ändert und K sich bewegt; oft muß das Ringintegral nicht ausgewertet werden (**B**=const), dann Ψ zeitl. ableiten

Es geht nur $\dot{\Phi}^{(B)}$ ins Induktionsgesetz ein. Erst nach Verknüpfung mit dem **Ohmschen Gesetz für bewegte Leiter** geht auch $\dot{\Phi}^{(u)}$ mit ein. Erst dann ist von ind. Strömen die Rede.

Induktionsgesetz (S.101f)	$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a}$ (3.40, S.102)	$\text{rot} \vec{E} = - \dot{\vec{B}}$ (3.2, S.82)
----------------------------------	---	--

E hat genau dort Wirbel, wo sich magnetische Felder zeitlich ändern

Je nach **Bezugssystem** ändern sich **E** und **B**, Φ bleibt jedoch gleich, solange $u \ll c_0$

$$\dot{\Phi}_\Sigma^{(u)} = \dot{\Phi}_\Sigma^{(B)}$$
 (Basis der Herleitung des Induktionsgesetzes) (3.38, S.102)

Grenzbedingungen für E und B (S. 112ff), Def: **n** zeigt von „-“ nach „+“

$$\text{Div} \vec{E} := \vec{n} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
 (3.48, S.114)

Die **Normalkomponente** der elektrischen Feldstärke an einer geladenen Fläche ist unstetig.

$$\text{Div} \vec{B} := \vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0$$
 da es keine magnet. Monopole gibt (3.53, S.115)

Die **Normalkomponente** des **B**-Feldes ist an allen Grenzflächen und unter allen Umständen stetig.

$$\text{Rot} \vec{B} := \vec{n} \times (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 \vec{K}$$
 (3.57, S.116)

$$\vec{t}_\perp \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 |\vec{K}| \quad (3.59a, S.116) \quad \vec{t}_\parallel \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (3.59b, S.117)$$

Die zum Flächenstrom senkrechte **Tangentialkomponente** des **B**-Feldes ist unstetig an strombelegten Flächen, die parallele Tangentialkomponente dagegen stetig.

$$\text{Rot} \vec{E} := \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0}$$
 (3.64, S.117)

Alle **Tangentialkomponenten** des **E**-Feldes bezüglich einer Fläche sind dort stetig.

$$\text{Div} \vec{J} := \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = -\dot{\sigma}$$
 Analogon zur differentiellen Kontinuitätsgleichung (3.69, S.118)

In der Grenzfläche dürfen keine flächenhaften Ströme fließen, die in die Strombilanz miteinbezogen werden müßten.

Zusammengefaßt nach S. 118:

$$\text{Div} \vec{E} := \vec{n} \cdot (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.65, S.118) \quad \text{Rot} \vec{E} := \vec{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = \vec{0} \quad (3.66, S.118)$$

$$\text{Div} \vec{B} := \vec{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (3.67, S.118) \quad \text{Rot} \vec{B} := \vec{n} \times (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = \mu_0 \vec{K} \quad (3.68, S.118)$$

$$\text{Div} \vec{J} := \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = -\dot{\sigma} \quad (3.69, S.118)$$

4. Elektrostatik

Wenn alle in den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Größen zeitunabhängig sind:

Statischer Fall	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (4.1, S. 125)	$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (4.2, S. 125)	
mit $\rho = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}}$	außerdem: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	(S. 125 oben)

Elektrostatistisches Potential	$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ (4.3, S.125)	$\varphi(P) = -\int_{P_0}^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$ (4.4, S.125)	
Grenzbedingungen:	$\varphi^+ = \varphi^-$ (stetig) (4.6, S.125)	$\vec{n} \cdot (\nabla^+ \varphi - \nabla^- \varphi) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (4.5, S.125)	

Kugelsymm. E-Feld $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ($r_0 \rightarrow \infty$) (4.7b, S.126) $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$ (2.27, S.73)

Ansätze mit dE und dφ aus dem kugelsymmetrischen Feld !!

Linienladung $\varphi(\rho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$ (4.8, S.127) $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$ (4.9, S.127)

Elektrische Spannung $U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2)$ (4.10, S.128)

Arbeit der elektrischen Kraft $A_{el} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = qU_{12}$ (S.128 unten)

Verschiebungsarbeit von Außen aus $\vec{F}_a + q\vec{E} = \vec{0}$ folgt: $A_a = -A_{el} = q(\varphi(P_2) - \varphi(P_1))$ (4.11, S.128)

zum Vorzeichen: das System, von dem die Kraft stammt gibt Energie (z.B. als E_{pot}) ab, dann ist $A_{el} > 0$, das System, auf das die Kraft einwirkt nimmt die Energie A_{el} (z.B. als E_{kin}) auf

Elektrischer Dipol	$\vec{p} = q\vec{l}$	I zeigt von -q nach +q	(4.12, S.128)
Punktdipol	$\vec{p} = q\vec{l}$	wenn $l \rightarrow 0$ und $\vec{p} = \text{const}$	(4.14, S.130)

$\varphi(P) = \left\langle \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right\rangle_z = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ (4.13, S.129) $\vec{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$ (4.15, S.130)

Kraft und Drehmoment auf elektrischen Dipol im äußeren Feld

$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$ and. 1.60a,b, S. 47, R2 (4.17, S.132)

$\vec{F} = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E})$ gilt unter statischen Bedingungen, d.h. wenn $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ (s.o) und $\vec{p} = \text{const}$ gilt ! (A4.4, S.365)

$\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times \vec{E}$ erg. 1.60a,b, S.47, R2 (4.18, S.132)

Potentielle Energie eines Dipols in einem fremden, statischem el. Feld

$W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0)$ (A35)

Punktdipol im kugelsymmetrischen Feld

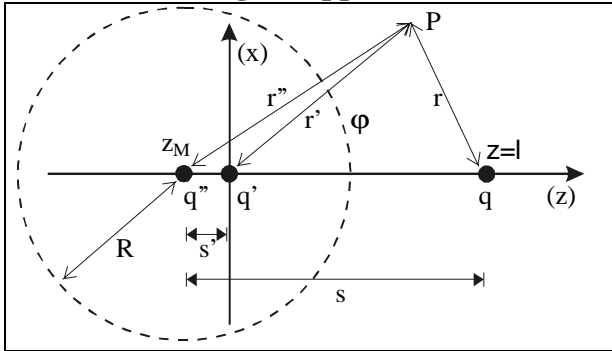
$\vec{F} = \frac{q\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$ wenn $\vec{E} \rightarrow \downarrow p$ (S.133 unten) $\vec{F} = -\frac{q\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 r_0^3}$ wenn $\vec{E} \rightarrow \rightarrow p$ (A4.4a)

Multipolentwicklung des Potentials $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{v=1}^N \frac{q_v}{|\vec{r} - \vec{r}_v|}$ (4.20, S.135)

1. Näherung: $Q = \sum_{v=1}^N q_v$ (4.23, S.136) 2. Näherung, Zusatz: $\vec{p} = \sum_{v=1}^N q_v \vec{r}_v$ (4.24, S.136)

Virtuelle Ladungen, Apolloniuskreise, Influenz,

Faßkreise = Äquipotentiallinien



$$q' = -\frac{R}{s}q \quad q' = -\frac{1}{k}q \quad k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

$$s s' = R^2 \quad s = \frac{k^2 l}{k^2 - 1} \quad s' = \frac{l}{k^2 - 1}$$

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad z_M = -s' = \frac{-l}{k^2 - 1}$$

$$Q_0 = q' + q'' \quad \Phi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_0}{R} + \frac{q}{s} \right)$$

unterschiedliche Betrachtungsweisen: Kugel isoliert: Gesamtladung $Q_0 = \text{const}$, oder durch Sp.quelle mit Fernkugel verb. $\Phi_0 = \text{const}$.

Poissonsche Differentialgleichung

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Grenzbed. siehe links ! (4.25, S.136)

Vorraussetzung ist statisches Feld, d.h. 4.2, S.125, siehe links, muß unbedingt gelten.

Lösung für eine im Endlichen liegende Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4.31, S.140) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (4.32, S.140)$$

folgt aus 4.7b mit dem $d\varphi = f(dq)$ Ansatz; Flächenladung analog mit σda !

Eindeutigkeit der Lösung bei allgemeinen Potentialproblemen

Angenommen es gilt Gl. (4.34) $\oiint_S (\tilde{\varphi} \nabla \tilde{\varphi}) \cdot d\vec{a} = 0 \Rightarrow \nabla \tilde{\varphi} \equiv \vec{0}$ (4.34, S.141)

Dann ist das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Hinreichende Bedingungen sind:

(a) Dirichletsche Randbedingung: Das Potential ist auf der Randfläche S vorgeschrieben. Dann muß dort $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi \equiv 0$ gelten, und Gl. (4.34) ist erfüllt.

(b) Neumannsche Randbedingung: Die **Normalkomponente** des Potentialgradienten ist auf S vorgeschrieben. Dann muß dort $\nabla \varphi_1 \cdot \vec{n} da = \nabla \varphi_2 \cdot \vec{n} da$ bzw. $\nabla \tilde{\varphi} \cdot \vec{n} da = 0$

(c) Das Potential soll einen **beliebigen**, aber **konstanten Wert auf S** haben. Gleichzeitig soll das über S erstreckte Hüllenintegral des Potentialgradienten einen vorgeschriebenen Wert besitzen. Dann muß auf der Randfläche sowohl

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \text{const} \text{ als auch } \oiint_S \nabla \tilde{\varphi} \cdot d\vec{a} = \oiint_S (\nabla \varphi_1 - \nabla \varphi_2) \cdot d\vec{a} = 0 \text{ gelten, und Gl. (4.34) ist erfüllt.}$$

(d) Die Fläche S in Gl. (4.34) sei jetzt die **Fernkugel**. Das Potential soll dort mindestens wie $1/r$ abnehmen. Folglich nimmt $\vec{n} \cdot \nabla \varphi$ dort mindestens wie $1/r^2$ ab. Da auch $\tilde{\varphi}$ diese Forderung erfüllt, falls φ_1 und φ_2 das tun, und der Inhalt der Kugeloberfläche nur wie $1/r^2$ zunimmt, geht die linke Seite der Gl. (4.34) mindestens wie $1/r$ gegen Null, wenn sich S der Fernkugel nähert.

Eine Lösung der Poissonschen DGL, welche eine der 4 genannten Randbedingungen erfüllt, ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt, die bei der Berechnung von E keine Rolle spielt.

2 Potentialprobleme sind gleich, wenn ihre DGL und ihre Randbedingungen gleich sind. Wichtige Anwendung: Faraday-Käfig

Energie des E-Feldes: (innere potentielle Energie, bzw. von außen aufzubringende Arbeit)

Allg.: $A_a = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N q_v \varphi_v$ (4.47, S.152) $A_a = W = \frac{1}{2} \left[\iiint_G \varphi \rho dV + \iint_S \varphi \sigma da \right]$ (4.51, S.153)

für räumlich und flächenhaft verteilte Ladungen

speziell bei einer homogenen Kugelladung $W = \frac{3}{5} \frac{Q_0^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ (S.154 Mitte)

Räuml. Energiedichte des E-Feldes $w_E = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$ (4.53, S.154) $W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\text{Raum}} \vec{E}^2 dV$ (4.55, S.155)

5. Metallische Leiter

Ohmsches Gesetz	$\vec{J} = \kappa \vec{E}$	falls ruhend !	(5.5, S.157)	$\kappa = enb$ bei e^- (el. Leitfähigkeit)(5.4, S.157)
Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter im B Feld	$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$	für	$\vec{u}^2 \ll c_0^2$	(5.6, S.158)
gerne benutzt:	$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \vec{u} \times \vec{B}$	bei e^- :	$\vec{J} = \kappa \vec{E} - b(\vec{J} \times \vec{B})$	(5.7, S.158) $ \vec{J} ^2 = \kappa \vec{E} \cdot \vec{J}$ (5.8, S.158)

bei e^- bedeutet: bei ausschließlicher Elektronenleitung !

U=IR gilt bei bewegten Leitern nicht mehr !!!

Driftgeschwindigkeit, Stromdichte und Kraft für Elektronen

$$\vec{J} = -en\vec{u}_D \quad (5.1, S.156) \quad \vec{u}_D = \frac{b}{e} \vec{F} \quad (5.2, S.157) \quad \vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{u}_D \times \vec{B}) \quad (5.3, S.157)$$

zu Hall-Effekt siehe UNBEDINGT Anhang C, Räumliches: Bemerkungen zum Halleffekt !

Hall-Effekt wenn nur Elektronen zur Leitfähigkeit beitragen: wegen der e^- entsteht an bestimmten Stellen das „-“

$$\vec{E}_\parallel = \frac{1}{\kappa} \vec{J} \quad (5.9a, S.158) \quad \vec{E}_\perp = \frac{b}{\kappa} (\vec{J} \times \vec{B}) = -(\vec{u}_D \times \vec{B}) = \langle R_H B_z J_x \vec{e}_y \rangle \quad (5.9b, S.159)$$

Das Auftreten dieser senkrechten Komponente wird Hall-Effekt genannt $\rightarrow E_\perp$ heißt „Hall-Feld“

$$R_H = -\frac{b}{\kappa} = \frac{1}{-en} = \left[\frac{m^3}{As} \right] \quad (5.10, S.159) \quad U_H = \langle R_H B_z J_x l \rangle \quad (5.12, S.159)$$

Vorzeichen von U_H und R_H je nach Art der Ladungsträger

Hallwinkel β_H : ist definiert als Winkel zwischen **J** und **E**, also allgemein $\cos \beta_H = \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{|\vec{J}| |\vec{E}|}$ (Def. S.159ob)

oft, aber nicht immer (Anordnung!) gilt $\tan \beta_H = \frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_\parallel|}$ z.B. (5.11b, S.159) oder $\tan \beta_H = \frac{|\vec{J}_\perp|}{|\vec{J}_\parallel|}$ z.B. (A5.1)

Joulesche Wärme: Leistungsdichte $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$ (5.13, S.161) $p = \frac{1}{\kappa} |\vec{J}|^2$ (5.14, S.161)
allgemein für ohmschen Leiter, auch bei Hall-Effekt

Allgemeines Problem stationärer Stromverteilungen

stationär: $div \vec{J} = 0$ (5.15, S.161) nicht Stationär: $div \vec{J} = -\dot{\rho}$

Laplace-Gleichung	$\nabla^2 \varphi = 0$	in Bereichen konstanter Leitfähigkeit	(5.17, S.162)
	$\varphi_1 - \varphi_2 = U$	zwischen den Elektroden	

Grenzflächen zwischen verschiedenen Leitfähigkeiten

$$Div \vec{J} = \vec{n} \cdot (\vec{J}^+ - \vec{J}^-) = 0 \quad (5.22, S.164) \quad \text{daraus folgt: } \vec{n} \cdot (\kappa^+ \vec{E}^+ - \kappa^- \vec{E}^-) = 0$$

Die Normalenkomponente stationärer Stromdichten ist an Grenzflächen stetig, die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt. Es existieren Flächenladungen nach (3.65, S.118).

$$\vec{t} \cdot \left(\frac{1}{\kappa^+} \vec{J}^+ - \frac{1}{\kappa^-} \vec{J}^- \right) = 0 \quad (5.23, S.164) \quad \text{Grenzbedingungen: } \frac{J_n^+}{\kappa^+} = \frac{J_n^-}{\kappa^-} > 0$$

Die Tangentialkomponenten von **J** sind unstetig, da die Tangentialkomp. des **E**-Feldes nach (3.66, S.118) unbedingt stetig sind.

Brechungsgesetz der Stromlinien	$\tan \beta^+ = \frac{\kappa^+}{\kappa^-} \tan \beta^-$	(5.24, S.164)
Dort, wo κ örtlich nicht konstant ist, können Ladungen sitzen. Dagegen ist jeder Homogenitätsbereich von κ ladungsfrei. In einen idealen Leiter treten die Stromlinien senkrecht ein.		

Ohmscher Widerstand	$U = RI$ (5.33, S.168)	$P_{Joule} = \iiint_V \frac{1}{\kappa} \vec{J}^2 dV = RI^2$ (5.34, S.168)
----------------------------	------------------------	---

zylindrisch $R = \frac{l}{\kappa a}$ (5.35, S.169)	krummer Quader $R = \frac{\alpha_0}{\kappa h \ln\left(1 + \frac{h}{\rho_0}\right)}$ (S. 171, Mitte)
--	---

Stromlos ruhende Metallkörper, Influenzeffekt

innerhalb stromlos ruhender Leiter $\vec{E} = 0$ wegen $\vec{J} = 0$ (5.37, S.171)

wegen $rot \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, $div(rot(...))=0$ mit $\vec{J} = \kappa \vec{E}$

und $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ schließlich die Raumladungsfreiheit: $\rho = 0$ nach Krass

innerhalb des metallischen Bereiches, q erzeugt ein äußeres E-Feld, σ wird dadurch beeinflusst

$$\vec{E}^{(q)} + \vec{E}^{(\sigma)} = 0 \quad (5.38, S.172)$$

Grenzbedingung an Metalloberflächen $\vec{E}^+(P) = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}(P)$ (5.40, S.173)

Das Feld tritt also immer senkrecht in den metallischen Leiter ein.

Prinzip der fiktiven oder virtuellen Spiegelladung (S.173ff) Spiegelladung bestimmen, E-Feld außerhalb des metallischen Bereiches berechnen, E in der Nähe des metallischen Bereiches $\rightarrow \sigma$ nach (5.40, S.173)

Mehrleitersysteme

Potentiale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von 3 Leitern mit Q_1, Q_2, Q_3 beliebig vorgegeben (und umgekehrt)

Dirichletsche Randwertaufgabe, eindeutige Lösung φ im ladungsfreien Raum

Zwischen den Potentialen der drei Leiter und ihren Ladungen besteht eine eindeutige Zuordnung

Potential- und Kapazitätskoeffizienten

$$\Phi_v = \sum_{\mu=1}^3 p_{v\mu} Q_\mu \quad (5.46, S.180) \quad Q_v = \sum_{\mu=1}^3 c_{v\mu} \Phi_\mu \quad (5.47, S.180)$$

Symmetrie, Reziprozität $p_{v\mu} = p_{\mu v}$ (5.53, S.182) $c_{v\mu} = c_{\mu v}$ (5.54, S.182)

Wichtige Eigenschaften $c_{vv} > 0$ $c_{v\mu} < 0$ $\sum_v c_{v\mu} > 0$ (5.56, S.184)

2-Leitersystem $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ (5.61, S.187) $p_{11} > 0, p_{22} > 0, p_{12} = p_{21} > 0$ (5.62a, S.187)

$p_{11}, p_{22} > p_{12}$ (5.62b, S.187) $p_{11} + p_{22} - 2p_{12} > 0$ (5.62c, S.187)

Umkehrungssatz: $Q_1 \tilde{\varphi}_1 + Q_2 \tilde{\varphi}_2 + Q_3 \tilde{\varphi}_3 = \tilde{Q}_1 \varphi_1 + \tilde{Q}_2 \varphi_2 + \tilde{Q}_3 \varphi_3$ aus Klausur April '96

Diese Beziehung zwischen 2 Betriebszuständen (mit und ohne \sim) einer Anordnung gilt wegen der Reziprozität.

Wenn Zustände beliebig wählbar sind, dann diese Variablen ausklammern. Die Klammerausdrücke müssen einzeln Bed. erfüllen !

Energie eines Mehrleitersystems

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_G \vec{E}^2 dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \iint_S \varphi \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (5.58, S.186) \quad W = Q_1 U_{10} + Q_2 U_{20} + Q_3 U_{30} + \dots \quad (5.59, S.186)$$

Kondensatoren $Q = CU$ (5.63, S.187) $W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ (5.66, S.189)

Plattenkondensator $C = \epsilon_0 \frac{a}{l}$ (5.67, S.191) Kugelkondensator $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}$ (5.68, S.192)

6. Magnetostatik

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6.1, \text{S.194}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (6.2, \text{S.195})$$

Ursache des magnetostatischen Feldes sind stationäre d.h. quellenfreie und zeitunabhängige Ströme

$$\text{Vektorpotential} \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Phi = \oint_K \vec{A} d\vec{r} \quad (6.3a,b, \text{S.194}) \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (6.4, \text{S.195})$$

Stromdurchflossener Draht $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$ (3.11b, S.88) $A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ (S.195 unten)

Differentialgleichung für das Vektorpotential $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ (6.7, S.197)

Lösung für eine im Endlichen liegende Stromverteilung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV, \quad (6.10, \text{S.197}) \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} da' \text{ bzw. } \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.12a,b, \text{S.198})$$

mit dem Zusammenhang: $\vec{J}(\vec{r}) dV = \vec{K}(\vec{r}) da = i d\vec{r} = \rho dV \vec{u} = dq \vec{u}$ (Stromelemente) (6.13, S.198)

Gesetz von Biot-Savart $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV,$ and. (3.10b, S. 87) (6.14, S.198)

Magnetischer Dipol (S. 200ff), magnetisches Dipolmoment $\vec{m} = ia\vec{n}$ (6.21, S.202)

magnetischer Punktdipol $a \rightarrow 0$ aber $\vec{m} = ia\vec{n} = \text{const}$ (6.22, S.203)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin\vartheta}{r^2} \vec{e}_\alpha \quad (6.23, \text{S.203}) \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad (6.24, \text{S.203})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2} \quad (6.25, \text{S.203}) \quad 6.23 \text{ bis } 6.25 \text{ gelten nur für den Punktdipol exakt !}$$

Kräfte $d\vec{F} = dQ(\vec{u} \times \vec{B}) = i d\vec{r} \times \vec{B}$ partielle Kräfte aus Lorentzschem Kraftgesetz (6.26, S.204)

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.28, \text{S.205}) \quad \text{magnetostatisch: } \vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6.30, \text{S.205})$$

Sonderfall: Wenn $\vec{m} \rightarrow \leftarrow \vec{B}$ feld(anti-)parallel, dann $\vec{F} = \pm |\vec{m}| (\nabla |\vec{B}|)_{P_0}$ (6.31, S.206)

Drehmomente

allg: $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{m} \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \vec{B}$ In homogenen B-Feldern: $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$ (A6.1, S.368)

Bei den Kräften und Drehmomenten sind immer die externen, äußeren Felder gemeint !!!

$$\oint d\vec{r}' = 0 \quad \text{Verschwindet eine Gesamtkraft, so ist das Drehmoment unabhängig von einem Bezugspunkt}$$

Induktivitätskoeffizienten S.207

$$\text{aus } \vec{B} = \vec{B}^{(i)} + \vec{B}_{\text{fremd}} \quad \text{und} \quad \Phi = \iint_S \vec{B}^{(i)} \cdot d\vec{a} + \iint_S \vec{B}_{\text{fremd}} \cdot d\vec{a} = \Phi^{(i)} + \Phi_{\text{fremd}} \text{ folgt die}$$

Selbstinduktivität $\Phi^{(i)} = Li$ (6.32, S.208)

Torusförmige Spule innen: $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$ (S.210 Mitte) $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} l \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (6.33b, S.210)

Wechselseitige Induktivitäten

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3 \quad \Phi_2 = M_{21} i_1 + L_2 i_2 + M_{23} i_3 \quad \Phi_3 = M_{31} i_1 + M_{32} i_2 + L_3 i_3 \quad (6.36, S.212)$$

Neumannsche Formel $M_{\nu\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{K_\nu} \oint_{K_\mu} \frac{d\vec{r}_\mu \cdot d\vec{r}_\nu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|} \quad (6.37, S.212) \quad M_{\nu\mu} = M_{\mu\nu} \quad (6.40, S.213)$

Direkte Berechnung im allgemeinen zu schwierig !! Berechnung der Koeffizienten im allgemeinen viel einfacher mit:

$$\Phi_\nu^{(\mu)} = \iint_{S_\nu} \vec{B}^{(\mu)} \cdot d\vec{a}_\nu \quad (6.39, S.213) \quad \text{oder} \quad L := \frac{2W}{I^2} \quad \text{Definitionsgleichung !} \quad (S.233\text{oben})$$

von Stromschleife μ erzeugte, von Stromschleife ν rechtehändig umfaßter Fluß

Quasistatische Elektrodynamik (S. 217ff)

Bedeutung der Indizes: „C“ Coulomb-Gesetz, „BS“ Biot-Savart-Gesetz, „s“ statisch berechnet

div und rot wirken nicht auf t

$$\text{rot } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (6.45, S.217) \quad \text{div } \vec{E}_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (6.46, S.217)$$

$$\text{div } \vec{B}_{BS}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.47, S.217) \quad \text{rot } \vec{B}_{BS} = \mu_0 \left[\vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}_C(\vec{r}, t) \right] \quad (6.51, S.217)$$

$$\text{formgleich zur Lorentz-Beziehung:} \quad \text{div } \vec{A}_s(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \dot{\varphi}_s(\vec{r}, t) \quad (6.50, S.217)$$

Die Felder \vec{E}_C, \vec{B}_{BS} befriedigen also die Maxwell-Gleichungen (3.1), (3.3), (3.4). Nur dem Induktionsgesetz (3.2) gehorchen sie im allgemeinen nicht, und sind daher natürlich auch nicht die Lösung dieses Gleichungssystems im allgemeinen dynamischen Fall.

Ausnahme: „fast statische Bedingung“ $\dot{\vec{J}} \equiv \vec{0}$ und $\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \neq 0$ (6.52, S.218)

Quasistationäre Näherung (langsam zeitveränderliche Stromverteilungen)

Das Feld E_{ind} wird hinzugefügt, damit das Induktionsgesetz gilt. Vernachlässigt wird hier aber der induzierte Anteil der Verschiebungsstromdichte, nicht jedoch ihr coulombscher Anteil !

$$\vec{E} = \vec{E}_C + \vec{E}_{ind} \quad (6.56a, S.219) \quad \vec{B} = \vec{B}_{BS} \quad (6.56b, S.219)$$

mit $\vec{E}_{ind}(\vec{r}, t) := -\vec{A}_s(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ als der korrigierende „induzierte el. Feldstärke“ (6.55, S.218)

Potentialbeziehungen $\vec{E}_C = -\nabla\varphi_s \quad \vec{E}_{ind} = -\dot{\vec{A}}_s \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}_s \quad (6.57, S.219)$

„mod. Maxwell-DGL“ $\text{div } \vec{E}_C = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (6.58, S.219)$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}_C) \quad (6.59, S.219)$$

$$\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \quad \text{die Kontinuitätsgleichung ist immer noch erfüllt} \quad (S.219 \text{ Mitte})$$

$$\text{div } \vec{E}_{ind} = -\text{div } \dot{\vec{A}}_s = \epsilon_0 \mu_0 \ddot{\varphi}_s \quad \text{ist im allgemeinen nicht mehr quellenfrei} \quad (6.60, S.219)$$

Satz von Helmholtz S.219f

Die Darstellung (6.61, S.219) eines Vektorfeldes durch seine Quellenverteilung u und Wirbelverteilung w wird Satz von Helmholtz genannt oder Hauptsatz der Vektoranalysis.

7. Induzierte quasistationäre Ströme

Die Bedingung $l_{\max} \ll \chi = \frac{2\pi c_0}{\omega}$ präzisiert, wann die quasistationäre Näherung anwendbar ist.

Gegeninduktion: wechselseitige Beeinflussung der Ströme

Selbstinduktion: Rückwirkung der Ströme auf sich selbst

Vorbemerkung: $\vec{J} = \frac{i}{a} \frac{d\vec{r}}{ds}$ in Leitern mit konstantem Querschnitt (7.4, S.224)

Induzierte Schleifenströme:

Spannung (immer zwischen 2 Raumpunkten) und Umlaufspannung \dot{U} sind komplementäre Begriffe

$$-\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} \quad \text{Vorsicht Vorzeichen!} \quad (7.3a, S.222)$$

$$\dot{U} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = i \oint_K \frac{ds}{\kappa a} = \dot{R}i \quad (7.5, 7.6, S.224) \quad Ri = -\dot{\Phi}^{(B)} \quad (7.7, S.225)$$

K: Integration in **i-Richtung**, homogenes **J** vorausgesetzt

bei stehender Leiterschleife

Nur der Anteil \vec{E}_{ind} bringt einen von null verschiedenen Wert in den Ringintegralen, denn nur dieser ist verwirbelt. Die Ringintegrale haben die Dimension einer Spannung, sind aber Umlaufspannungen. Die Spannung wird hier wegabhängig!

Selbstinduktion und wechselseitige Induktion bei 2 Stromschleifen S. 225f

Man siehe da vor allem aus Bild 7.2, S.226 die Richtungen von i , di/dt , und $d\vec{B}/dt$ zueinander!

Energie des B-Feldes (S. 228ff)

Bei 1 Stromschleife

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = -L \frac{di}{dt} \quad (7.9, S.228) \quad W = \frac{1}{2} Li^2 \quad (7.12, S.229)$$

Bewegung der Ladungsträger gegen die Kraft, die das induzierte Feld auf sie ausübt

Bei 3 Stromschleifen

mit $L_v = L_{vv}, M_{v\mu} = L_{v\mu}$ folgt: $\oint_{K_v} \vec{E} \cdot d\vec{r}_v = -\sum_{\mu=1}^3 L_{v\mu} \frac{di_\mu}{dt}$ (7.14, S.230)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 L_{v\mu} i_v i_\mu = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + L_3 i_3^2) + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3 \quad (7.16, S.230)$$

Zylinderspule $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{l}$ (7.17b, S.231)

Räumliche Energiedichte

$$w_B = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (7.18, S.232) \quad W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{Raum}} \vec{B}^2 dV \quad (7.19, S.232)$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Raum}} (\vec{A} \cdot \vec{J}) dV \quad (7.20, S.232) \quad W = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2 + i_3 \Phi_3) \quad (7.21, S.232)$$

bei einer dreischleifigen Anordnung

Koaxialleitung

$$\text{Induktivität: } L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) l \quad (7.22a, \text{ S.233})$$

$$\text{Induktivitätsbelag } \bar{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} = \bar{L}_i + \bar{L}_a \quad (7.22b, \text{ S.234})$$

Strom-Spannungs-Beziehung bei Spule und Trafo

$$\text{Spule } U = L_{sp} \frac{di}{dt} \quad \text{bei höheren Frequenzen noch Streukapazitäten} \quad (7.35, \text{ S.237})$$

Physikalische Interpretation S. 237

$$\text{Trafo } U_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad U_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (7.36, \text{ S.239})$$

$$\text{allg: } \underline{L_1 L_2 \geq M^2} \quad (7.37, \text{ S.239}) \quad \text{Feste Kopplung } L_1 L_2 = M^2 \quad (7.38, \text{ S.239})$$

$$\text{bei fester Kopplung ist die Übersetzung } \frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (7.40, \text{ S.239})$$

Induktion in bewegten Leitern

$$\text{Ohmsches Gesetz für bewegte Leiter } \vec{J} = \kappa \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (5.6, \text{ S.158})$$

Bewegte Leiterschleifen

Faradaysche Flußregel (7.45)

$$\oint_K \vec{J} \cdot d\vec{r} = \dot{R}i = \oint_K (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7.44, \text{ S.244}) \quad \oint_K (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\dot{\Phi}^{(\vec{B})} - \dot{\Phi}^{(u)} = -\dot{\Phi} \quad (7.45, \text{ S.244})$$

$$\text{also: } \dot{R}i = -\dot{\Phi} \quad \text{mit dem kompletten Fluß} \quad \dot{\Phi} = \dot{\Phi}^{(\vec{B})} + \dot{\Phi}^{(u)} \quad (7.46, \text{ S.244})$$

$$\dot{\Phi}^{(\vec{B})} = \iint \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{a} \quad (3.34a, \text{ S.99}) \quad \dot{\Phi}^{(u)} = -\oint (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (3.34b, \text{ S.99})$$

dies ist eine Verallgemeinerung von (7.7, S.225, siehe links), es reicht den kompletten Fluß nach der Zeit abzuleiten

$$\text{interessante Beziehung: } iR - U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{R. fragen ob immer gültig !!!}$$

$$\text{nicht vergessen: } R = \frac{l}{\kappa A} \quad \vec{J} = \kappa \frac{R \cdot i}{l} \vec{e}_i = \frac{i}{a} \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{Stromdichte zeigt in Richtung des Stromes}$$

$$\text{Wenn sich L bewegt und seine Form ändert } \dot{\Phi} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} + \dot{\Phi}_{fremd} \quad (7.47, \text{ S.244})$$

Gutes Beispiel zur Asynchronmaschine S.245

$$\text{Homogenes B-Feld } \vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Anmerkungen zu - Wirbelströme, - mögliche Fehler, - Lenzsche Regel (S.247)

8. Elektrisch polarisierbare Stoffe

Elektrische Polarisation	$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ (8.1, S.248)	$d\vec{p} = dQ\vec{l}$ mit $dQ = N(-e)$ (8.2, S. 249)	
	$\rho_0 = \frac{dQ}{dV}$ (8.3, S.249)	$\vec{P} = \rho_0\vec{l}$ (8.4, S.249)	

l : kleinräumige Ladungsverschiebung, Verbindung von Polarisation und Dipolmoment durch 8.1 !

In Leitern $\kappa = \text{endlich}$ $P = 0$ In Nichtleitern $\kappa = 0$ $P = \text{endlich}$

Polarisationsladungen

Grundlage:
$$-Q_{\text{versch}} = -\iiint_S \vec{P} d\vec{a} = -\iiint_{G \text{ von } S} \text{div}(\vec{P}) dV = \iiint_{G \text{ von } S} \rho_{\text{pol}} dV = Q_{\text{pol}} \quad (8.7f, S.250)$$

Folgerung:
$$\text{div} \vec{P} = -\rho_{\text{pol}} \quad (8.8, S.251) \qquad \sigma_{\text{pol}} = \frac{dQ_{\text{versch}}}{da} \quad (8.9, S.251)$$

n ist immer die äußere Flächennormale !

$$\sigma_{\text{pol}} = \sigma_{\text{pol}}^+ + \sigma_{\text{pol}}^- \quad (8.10, S.252) \qquad \text{Div} \vec{P} = \vec{n} \cdot (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) = -\sigma_{\text{pol}} \quad (8.11, S.253)$$

+ und - bzgl. der Seiten und **n** Grenzbedingung !

Es geht hier um makroskopische Beziehungen, d.h. Quantenphänomene nicht beachtet !

$\vec{E}^{(pol)}$ ist im Medium der Polarisation logischerweise entgegengerichtet (**P** zeigt von - nach +, **E** von + nach -).
Es kann aus σ_{pol} berechnet werden. Es wird daher oft auch depolarisierendes oder entelektrisierendes Feld genannt.

Homogen polarisierte Kugel im Innern
$$\vec{E}^{(pol)} = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0} \quad (8.13; S.254)$$

Polarisationsstrom (S.255)

$$\vec{J}_{\text{pol}} = \rho_0 \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{P}} \quad (8.15, S.255) \qquad \text{div} \vec{J}_{\text{pol}} + \dot{\rho}_{\text{pol}} = 0 \quad (8.16, S.255)$$

Der Polarisationsstrom erfüllt für sich alleine schon eine Kontinuitätsgleichung.

Freie Ladungen Q_f bzw. σ_f und die Verschiebungsdichte **D**

mit $\rho_f + \rho_{\text{pol}} = \rho \quad (8.17, S.256) \qquad \sigma_f + \sigma_{\text{pol}} = \sigma \quad (S.257, \text{unten})$

folgt $\epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \rho_{\text{pol}} + \rho_f \quad (8.18a, S.256) \quad \text{also} \quad \epsilon_0 \text{div}(\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f \quad (8.18b, S.256)$

und mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (8.20, S.257) \qquad \vec{J} = \vec{\tilde{J}} + \vec{J}_{\text{pol}} \quad (S.256 \text{ unten})$

dann $\text{div} \vec{D} = \rho_f \quad (8.21, S.257) \qquad \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} = \vec{\tilde{J}} + \dot{\vec{D}} \quad (8.22, S.257)$

oder $\iiint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_f \quad (8.23, S.257) \qquad \oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = -\epsilon_0 \dot{\Phi}^{(B)} + \oint \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (8.24, S.257)$

Hier sind immer die Gesamtfelder in einem Punkt gemeint !

D ist die elektrische Verschiebungsdichte, selbst im statischen Fall hat **D Wirbel** (die von P), ist also global kein Gradientenfeld.

Grenzbedingungen	$\epsilon_0 \text{Div } \vec{E} = \sigma_{pol} + \sigma_f$ (8.25, S.257)
$\text{Div } \vec{D} = \vec{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \sigma_f$ (8.26, S.257)	$\text{Rot } \vec{D} = \text{Rot } \vec{P} = \vec{n} \times (\vec{P}^+ - \vec{P}^-)$ (8.27, S.257)

Im Inneren eines stromlosen (und ruhenden) Metallkörpers

aus $\vec{E} = \vec{0}$ und $\vec{P} = \vec{0}$ folgt $\vec{D} = \vec{0}$ und damit $\vec{n} \cdot \vec{D}^+ = \sigma_f$ (8.28, S.258)

Homogen polarisierte Kugel: $\vec{E}^{(pol)} = -\frac{\vec{P}_0}{3\epsilon_0}$ in der Kugel ! (8.13a, S. 254)

$\vec{D}^{(pol)}$ hat flächenhafte Wirbel auf der Kugel nach (Bsp. 8.4.1)

Elektrische Materialgrößen

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ (8.31, S.259) $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ (8.32, S.259)

$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ (8.32, S.260)

χ_e el. Suszeptibilität ϵ_r Permittivitätszahl, relative Dielektrizitätskonstante ϵ Permittivität
(Dielektrizitätskonstante)

In der Regel gilt innerhalb dielektrischer Bereiche

$\rho_f = 0 \Leftrightarrow 0 = \text{div } \vec{D} = \epsilon \text{div } \vec{E} = \epsilon_r \rho_{pol}$ d.h. Polarisationsladungen *nur* auf der Oberfläche

Grenzflächen zwischen verschiedenen Dielektrika

S. 259

$\text{Div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{pol}$	für $\sigma_f = 0$ (8.34, S.261)	$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0}$ (8.35, S.261)
$\text{Div } \vec{D} = 0$	für $\sigma_f = 0$ (8.36, S.261)	$\text{Rot } \vec{D} = \text{Rot } \vec{P}$ (8.37, S.361)

vereinfacht, wobei **n** immer von der „-“ Seite zur „+“ Seite zeigt, ergibt sich:

$D_n^+ = D_n^-$ für $\sigma_f = 0$ (8.39, S.261) $E_t^+ = E_t^-$ (8.38, S.261)

oder gleichwertig

$\epsilon_+ E_n^+ = \epsilon_- E_n^-$ für $\sigma_f = 0$ (8.41, S.261) $\frac{D_t^+}{\epsilon_+} = \frac{D_t^-}{\epsilon_-}$ (8.40, S.261)

Hieraus läßt sich wieder ein **Brechungsgesetz** ableiten

Beispiele zu Plattenkondensatoren S.262ff

9. Magnetisch polarisierbare Stoffe

Amperesche Kreisströme: - Umlaufbewegung und Spin der Elektronen → Gesamtmoment

Paramagnetismus: - mikroskopische Permanentmagneten $I_{mag} \uparrow \uparrow I_f$
 $\chi_m > 0$ - Elektronenspin stark überwiegend; wirkt verstärkend

Diamagnetismus: - kein permanentes magn. Moment $I_{mag} \uparrow \downarrow I_f$
 $\chi_m < 0$ - Umlaufspin überwiegt; wirkt schwächend

Ferromagnetismus: - kollektives Phänomen
 $\chi_m \gg 0$ - Irreversible Vorgänge
 - Permanentmagneten
 - Curie-Temperatur (Ferromagnetismus -> Paramagnetismus)
 - Blochwände und Weißsche Bezirke

Magnetisierung	$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$	(9.1, S.275)
-----------------------	---------------------------------	--------------

Verbindung von magnetischem Moment und

Magnetisierung

Magnetisierungsströme

punktweise $\vec{J}_{mag} = \text{rot } \vec{M}$ (9.4, S.277)

global $\oint_K \vec{M} \cdot d\vec{r} = I_{mag}$ (9.7, S.278)

die Wirbel der Magnetisierung sind gleich den Magnetisierungsströmen

I_{mag} ist die gesamte Stärke der Magnetisierungsströme durch eine von K berandete, ansonsten beliebige Kontrollfläche

Quellenfreiheit $\text{div } \vec{J}_{mag} = 0$ (9.8a, S.278) $\overset{\circ}{I}_{mag} = 0$ (9.8b, S.278)

der gesamte Mag.-strom durch eine *Hüllfläche*

Grenzbedingung $\text{Rot } \vec{M} = \vec{n} \times (\vec{M}^+ - \vec{M}^-) = \vec{K}_{mag}$ (9.6, S.277)

\vec{n} zeigt immer von der „-“ Seite zur „+“ Seite

Freie Ströme und magnetische Feldstärke

S. 281

mit $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$ (9.11, S.280) $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} = \vec{J}_{mag} + \vec{J}_f + \vec{J}_{pol} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}$ (9.12, S.281)

und $\vec{H} := \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ (9.14, S.281)

$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$

gilt bei linear magnetisierbaren Stoffen

es folgen aus 9.14 die Wirbel und Quellen von **H**

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}}$ (9.15, S.281)

$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_f + \iint_K \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{a}$ (9.16a, S.281)

$\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$ (9.17a, S.281)

$\oiint \vec{H} \cdot d\vec{a} = -\oiint \vec{M} \cdot d\vec{a}$ (9.17b, S.281)

mit $\vec{K} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$ und $\frac{1}{\mu_0} \text{Rot } \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$ (9.18, S.282)

folgen die Grenzbedingungen für H, siehe rechts. Man beachte und untersuche immer, ob die freien oder die gesamten Ströme gegeben und gesucht sind !

Grenzbedingungen für \mathbf{H}

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{K}_f \quad (9.19, \text{S.282}) \quad \text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M} \quad (9.20, \text{S.282})$$

Bei **leeren Spulen** würde nur \mathbf{B} herrschen. Von \mathbf{H} gehen **keine Kräfte** aus, nur von \mathbf{B} ! \mathbf{H} ist nur ein **Hilfsfeld** !
 \mathbf{H} kann nicht aus einem Vektorpotential abgeleitet werden !

Torusspule $\vec{H} = \frac{Ni}{2\pi\rho} \vec{e}_\alpha$ innerhalb; außerhalb $H=0$ (9.22, S.283)

Zylinderspule (sehr lang) $\vec{B} = \mu_0 K_\alpha \vec{e}_z$ innen, $B=0$ außen

Magnetische Materialgrößen

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (9.24b, \text{S.285}) \quad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (9.26, \text{S.285})$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \mu_r = 1 + \chi_m \quad (9.25, \text{S.285})$$

$$\chi_m > 0 \text{ paramagnetischer Stoff} \quad \chi_m < 0 \text{ diamagnetischer Stoff}$$

mit χ_m magnetische Suzeptibilität μ Permeabilität μ_r relative Permeabilität bzw. Permeabilitätszahl

Grenzflächen zwischen verschiedenen permeablen Bereichen

$$\text{Rot } \vec{H} = 0 \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.28, \text{S.286}) \quad \text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M} \quad (9.27, \text{S.286})$$

$$\text{Rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{mag} \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.30, \text{S.286}) \quad \text{Div } \vec{B} = 0 \quad (9.29, \text{S.286})$$

vereinfacht ergibt sich dann:

$$H_t^+ = H_t^- \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.31, \text{S.287}) \quad \mu_+ H_n^+ = \mu_- H_n^- \quad (9.34, \text{S.286})$$

$$\frac{B_t^+}{\mu_+} = \frac{B_t^-}{\mu_-} \quad \text{für } \vec{K}_f = \vec{0} \quad (9.33, \text{S.287}) \quad B_n^+ = B_n^- \quad (9.32, \text{S.286})$$

Hieraus läßt sich wieder ein **Brechungsgesetz** für die Feldlinien ableiten.

Magnetisierungskurve

$$\vec{B} = \mu(\vec{H})\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}^{(0)} + \vec{B}^{(mag)} \quad (9.39, \text{S.293}) \quad L = \mu_r L_0 \quad (9.41, \text{S.295})$$

Anmerkungen:

Vorsicht ! Dies sind Näherungen.

Ströme in ohmschen Leitern $\text{rot } \vec{H} = \kappa \vec{E}$ gilt näherungsweise, siehe dazu (9.42, S.296)

in weichmagnetischen Leitern $\vec{J}_{mag} = (\mu_r - 1)\vec{J}_f = (\mu_r - 1)\kappa \vec{E}$ gilt näherungsweise (9.43, S.296)

Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen mit D und H

Definitionen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (9.44, \text{S.296}) \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (9.45, \text{S.296})$$

$$\rho = \rho_{pol} + \rho_f \quad (8.17, \text{S.256}) \qquad \vec{J} = \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_f \quad (9.11, \text{S.280})$$

Die üblichen Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \vec{D} = \rho_f \quad (9.46, \text{S.296}) \quad \text{statt:} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.1, \text{S.82})$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (9.47, \text{S.296}) \quad \text{bleibt}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (9.48, \text{S.297}) \quad \text{bleibt}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}} \quad (9.49, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[\vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \right] \quad (3.4, \text{S.82})$$

Die transformierten Grenzbedingungen

$$\text{Div } \vec{D} = \sigma_f \quad (9.50, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad \epsilon_0 \text{Div } \vec{E} = \sigma_{pol} + \sigma_f \quad (8.25, \text{S.257})$$

$$\text{Rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (9.51, \text{S.297}) \quad \text{anders} \quad \text{Rot } \vec{D} = \text{Rot } \vec{P} = \vec{n} \times (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) \quad (8.27, \text{S.257})$$

$$\text{Div } \vec{B} = 0 \quad (9.52, \text{S.297}) \quad \text{anders} \quad \text{Div } \vec{H} = -\text{Div } \vec{M} \quad (9.27, \text{S.286})$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{K}_f \quad (9.53, \text{S.297}) \quad \text{statt} \quad \frac{1}{\mu_0} \text{Rot } \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f \quad (9.18, \text{S.282})$$

Materialgleichungen

$$\vec{J}_f = \kappa(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (9.54, \text{S.297})$$

bei linear polarisierbaren Stoffen gelten weiterhin

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{für ruhende Leiter} \quad (9.55, \text{S.297}) \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{für ruhende Leiter} \quad (9.56, \text{S.297})$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \quad (8.31, \text{S.259}) \qquad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \quad (9.24b, \text{S.285})$$

Hier gehen immer die Gesamtfelder, die in dem Stoff und Punkt wirken ein, nicht nur evt. Ursachen.

10. Elektromagnetische Energiebilanz

(zugeführte räumliche) Leistungsdichte $p = \frac{dP}{dV}$ (S.288)

$p > 0$ Energie fließt zu

$p < 0$ Energie fließt ab

Joulsche Leistungsdichte $p = \frac{\vec{J}^2}{\kappa} \geq 0$ (5.14, S.161)

Elektrische Leistungsdichte ganz allgemein: $p_e = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (10.6, S.300)

$p_e = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial(\vec{E}^2)}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ (10.7, S.300)

$p_e = \dot{w}_e + \vec{E} \cdot \vec{J}_{pol}$ (10.8, S.300)

Mit der einem Volumenelement im Dielektrikum zugeführten Leistung wird dort der Energieinhalt des E-Feldes geändert und Polarisationsarbeit geleistet. Alle 3 Gleichungen sind gleichwertig und völlig allgemein.

Gespeicherte elektrische Energie im Fall linearer Dielektrika

Kreisprozeß $\Delta A_e = 0$ Energie im Dielektrikum gespeichert, keine Verluste,

$\Delta A_e > 0$ Energie teilweise in Wärme umgewandelt (irreversibel)
(Ferroelektrika analog zur magnetischen Hysterese)

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ lineare Dielektrika haben keine Verluste ! (10.13, S.301)

$W_e = \iiint_G \left(\frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \right) dV$ (10.14, S. 302) , falls $E(t=0)=0$ und $W_e(t=0)=0$ gesetzt wurde.

$w_e = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2$ (10.15, S.302) oder äquivalent in linearen Dielektrika gilt auch

$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$ (10.16, S.302) oder $w_e = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$ (10.17, S.302)

Die Polarisationsenergie muß zum Energieinhalt des E-Feldes addiert werden, um die gesamte im Dielektrikum gespeicherte Energie zu erhalten.

Beim Kondensator $W_e = \frac{1}{2} Q_f U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_f^2}{C}$ (10.18, S.303)

Energiebilanz: $dW_{m/e} = dA_{Quelle} + dA_{mech}$

Energie/Leistung bei Medien in Feldern:

$\frac{d}{dt}(W_{m/e}) = U I + F_a u$ $F_i = -F_a$

UI ist dabei die von außen zugeführte elektrische, $F_a u$ die von außen zugeführte mechanische Arbeit.

Magnetische Leistungsdichte	ganz allgemein:	$p_m = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(10.25, S.304)
		$p_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial(\vec{B}^2)}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dot{w}_B + \vec{M} \operatorname{rot} \vec{E} = \dot{w}_B + \vec{E} \cdot \vec{J}_{mag} + \underbrace{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{M})}_{=0}$	(10.26, S.304)
Mit der einem magnetisierbaren Körper insgesamt zugeführten Leistung wird der Energieinhalt des B-Feldes geändert und Magnetisierungsarbeit geleistet. Die 3 Gleichungen sind völlig gleichwertig und gelten ganz allgemein.			

Gespeicherte magnetische Energie im Fall weichmagnetischer Stoffe = linearer Magnetika

Kreisprozeß $\Delta A_m = 0$ Energie im Kern gespeichert

$\Delta A_m > 0$ Energie teilweise in Wärme umgewandelt (irreversibel, Hystereseschleife)
 Hystereseverlust proportional zum Flächeninhalt der Hystereseschleife

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
 gilt bei linearen Magnetika (10.36, S.307)

$$w_m = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$
 (10.37, S.307)
$$W_m = \frac{1}{2} i_f \Phi = \frac{1}{2} L i_f^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$$
 (10.38, S.308)

Diese Beziehungen gelten natürlich auch in para- und diamagnetischen Substanzen.

Elektromagnetische Energiestromdichte (Poynting-Vektor)

$$p_{ges} = \vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$
 (10.39, S.310)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$
 (10.45, S.310)

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = - \left(\vec{E} \cdot \vec{J}_f + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -p_{ges}$$
 (10.46, S.311)

Elektromagnetische Energiebilanzen = Kontinuitätsgleichung für die gespeicherte el. u. magn. Energie

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J}_f = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 \right)$$
 (10.47, S.311)

für lineare und isotrope Medien gilt vereinfacht:

$$\operatorname{div} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{E} \cdot (\vec{J}_f + \vec{J}_{pol} + \vec{J}_{mag}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right)$$
 (10.48, S.311)

An Grenzflächen
$$\operatorname{Div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{K}$$

Vorsicht: Für die elektrische und magnetische Feldenergie gilt nicht das Superpositionsprinzip !

Anmerkungen:

- Elektromagnetisches Feld als Impulsträger
- Berücksichtigung thermischer Verluste, isotherme Kreisprozesse

11. Retardierte Lösungen der Maxwell-Gleichungen

Wellengleichung
$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11.2, S.319)$$

Lösung der Wellengleichung
$$w(z,t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad (11.1, S.319)$$

Daraus können die verschiedensten Wellenformen, z.B. Stehende Wellen, erzeugt werden.

Inhomogene Wellengleichung für **E** und **B**, hergeleitet aus den Maxwellgleichungen

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{E}} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \rho + \mu_0 \dot{\vec{J}} \quad (11.10, S.320) \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{B}} = -\mu_0 \text{rot } \vec{J} \quad (11.11, S.320)$$

Die Kontinuitätsgleichung
$$\text{div } \vec{J} = -\dot{\rho} \quad (11.12, S.320)$$

Die Felder sind über den Sender her miteinander verknüpft.

Nicht 6 sondern 4 skalare Funktionen → Übergang zu **dynamischen Potentialen**

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (11.13, S.321) \quad \vec{E} = -\text{grad } \phi - \dot{\vec{A}} \quad (11.14, S.321)$$

Inhomogene Wellengleichung für dynamische Potentiale

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{A}} = \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \right) - \mu_0 \vec{J} \quad (11.15, S.321)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.16, S.321)$$

mit der **Lorentz-Bedingung**
$$\text{div } \vec{A} = -\frac{1}{c_0^2} \dot{\phi} \quad (11.17, S.321)$$

folgen:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\vec{A}} = -\mu_0 \vec{J} \quad (11.18, S.321) \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \ddot{\phi} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.19, S.322)$$

B-Felder werden ausschließlich von Strömen erzeugt, während **E**-Felder sowohl von Ladungen als auch von zeitveränderlichen Stromverteilungen ausgehen.

E- und **B**-Felder bedingen sich nicht gegenseitig, sondern werden nur durch die Kontinuitätsgleichung verknüpft

Retardierte Zeit
$$t^* = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c_0} \quad (11.20, S.323)$$

Retardierte Potentiale

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t^*)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (11.21, S.323) \quad \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}', t^*)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (11.22, S.323)$$

Vorsicht. Die retardierte Zeit muß bei der Integration mitberücksichtigt werden.

Rechenregeln bezüglich grad, div und rot siehe S.325, 11.30, 11.31, S.325, 11.35, 11.36 und S.326, 11.38, 11.39

Die unendlichen Intervallgrenzen sind häufig durch $c_0 t$ zu ersetzen.

Retardierte Lösungen der Maxwell-Gleichungen

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \iiint \frac{[\rho]^*}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{[\dot{\vec{J}}]^*}{R} dV' \quad (11.49a, S.329)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \iiint \frac{[\vec{J}]^*}{R} dV' \quad (11.49b, S.329)$$

oder äquivalent

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left[\rho + \frac{R}{c_0} \dot{\rho} \right]^* \frac{\vec{R}}{R^3} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint [\dot{\vec{J}}]^* \frac{1}{R} dV' \quad (11.50a, S.330)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \left[\vec{J} + \frac{R}{c_0} \dot{\vec{J}} \right]^* \times \frac{\vec{R}}{R^3} dV' \quad (11.50b, S.330)$$

Dynamische Verallgemeinerung der Formel von Biot-Savart

Auch die statischen Felder werden retardiert erzeugt.

Statische Verhältnisse gelten, wenn \vec{J} und ρ hinreichend lange konstant sind.

B- und E-Feld eines Flächenstromes $K_y[z, t]$ in der xy -Ebene liegend

$$B_x[z, t] = \frac{\mu_0}{2} K_y \left[t - \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z > 0 \quad (11.56a, S.336) \quad B_x[z, t] = -\frac{\mu_0}{2} K_y \left[t + \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z < 0 \quad (11.56b, S.336)$$

$$E_y[z, t] = -\frac{\mu_0 c_0}{2} K_y \left[t - \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z \geq 0 \quad (11.56c, S.336) \quad E_y[z, t] = -\frac{\mu_0 c_0}{2} K_y \left[t + \frac{z}{c_0} \right] \text{ für } z \leq 0 \quad (11.56d, S.336)$$

E- und B-Feld hängen über $\pm c_0$ (Lichtgeschwindigkeit) zusammen

B- und E-Feld eines unendlichen Linienstromes,

kann jeweils hergeleitet werden über die Berechnung des Potentials A, geometrische Überlegungen usw.

Anmerkungen:

Die Avancierte (vordatierte Zeit) (S.332)

$$\hat{t} := t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c_0} \quad (\text{mathematisch völlig gleichberechtigt}) \text{ entfällt wegen Kausalität}$$

Das elektromagnetische Feld ist eichinvariant (S.333)

- Lorentz-Eichung („natürliche“ Eichung, Lorentz-Bedingung)
- Coulomb-Eichung

Beispiele: S. 333

- Unendlich ausgedehnter, ebener Flächenströme unrealistisch, jedoch oft brauchbare Idealisierung
- Die physikalischen Ursachen von E und B sind nicht die momentanen Verteilungen von

$$\vec{K}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sondern die retardierte Stromverteilung und ihre Änderung.}$$

Auf der Kugelfläche mit $r = c_0 t$ ist die Anwendung der Grenzbedingungen für E/B-Felder nicht möglich !!

Materialeigenschaften unter dynamischen Bedingungen

Die neue Gleichungen siehe B.S. 357.

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (11.100, S. 357) \quad \text{kleiner als im Vakuum:} \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Ansatz für reines Dielektrikum $\rho_f = 0 \quad \vec{J}_f = 0 \quad \mu_r = 1$

Brechungsindex des Dielektrikums aus der Maxwell'sche Relaxation $n = \frac{c}{c_0} = \sqrt{\epsilon_r}$

Vorsicht vor bedenkenloser Anwendung der statischen Materialgleichungen !

ETG-Kurzschluß: TEDY Formelsammlung, © 1997 Dieter Braisch & Wilko Kraß. Keine Gewähr für den Inhalt und evtl. Fehler.

Zeitveränd. elektrischer (Hertzscher) Dipol	Zeitveränd. magnetischer (Fitzgeraldscher) Dipol
<p> $p_z(t) = q(t)l \quad (11.64a, S.341) \quad t_0^* = t - \frac{r}{c_0} \quad (11.67, S.342)$ </p> <p> $\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{p}_z}{r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad (11.70, S.343)$ </p> <p> B-Linien sind Kreise um die Dipolachse </p> <p> aus $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \text{rot } \vec{B}$ folgen dann nach einmaliger Integration nach der Zeit </p> <p> die Gln. (11.71a-c, S.344): $E_r(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta$ </p> <p> $E_\alpha(P, t) = 0 \quad E_\vartheta(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^3} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{p}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta$ </p> <p> El. und magn. Feld sind hier also immer und überall senkrecht zueinander. </p>	<p> $\vec{m}_z(t) = i(t) a \vec{n} \quad t_0^* = t - \frac{r}{c_0}$ </p> <p> $\vec{E}(P, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{m}_z}{r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad (11.88, S.353)$ </p> <p> E-Linien sind Kreise um die Dipolachse </p> <p> $B_r(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} \right]^* 2 \cos \vartheta \quad (11.89a, S.353)$ </p> <p> $B_\vartheta(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^3} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r^2} + \frac{\ddot{m}_z}{c_0^2 r} \right]^* \sin \vartheta \quad (11.89b, S.353)$ </p> <p> $B_\alpha(P, t) = 0 \quad (11.89c, S.353)$ </p> <p> El. und magn. Feld sind hier also immer und überall senkrecht zueinander. </p>
<p> Retardierte Potentiale </p> <p> $\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p_z}{r^2} + \frac{\dot{p}_z}{c_0 r} \right]^* \cos \vartheta \quad (11.85, S.350)$ </p> <p> $\vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}_z(t_0^*)}{r} \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}_z(t_0^*)}{r} (\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad (11.68, S.342)$ </p>	<p> Retardiertes Potential </p> <p> $\vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_z}{r^2} + \frac{\dot{m}_z}{c_0 r} \right]^* \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad (11.87, S.352)$ </p> <p> $\varphi(P, t) = 0$, da keine umkompensierten Ladungen vorhanden sind. </p>

<p style="text-align: center;">Zeitharmonisches Dipolmoment</p> $p_z(t) = \hat{p}_z \sin \omega t \quad \text{für } t > 0 \quad (11.74, \text{ S.347})$ $p_z(t_0^*) = \hat{p}_z \sin(\omega t - kr) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0} \quad (11.75, \text{ S.347})$ <p style="text-align: center;">allgemeine Lsg. siehe S.347, 11.77a-c</p>	<p style="text-align: center;">Zeitharmonisches Dipolmoment</p> $m_z(t) = \hat{m}_z \sin \omega t \quad t > 0$ $m_z(t_0^*) = \hat{m}_z \sin(\omega t - kr) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c_0} \quad c_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ <p style="text-align: center;">allgemeine Lsg. siehe S.347, 11.91a-c</p>
<p>Nahzone (Näherung!) $kr \ll 1$ $2\pi r \ll \lambda$</p> $\vec{E}(P, t) = \frac{\hat{p}_z \sin \omega t}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad (11.78a, \text{ S.348})$ $\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \omega \hat{p}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad (11.78b, \text{ S.348})$ $\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 i(t) l \vec{e}_z \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (11.79, \text{ S.349})$ <p>Der magnetische Anteil ist gegen den elektrischen um $\pi/2$ phasenverschoben.</p>	<p>Nahzone (Näherung!) $kr \ll 1$ $2\pi r \ll \lambda$</p> $\vec{B}(P, t) = \frac{\mu_0 \hat{m}_z \sin \omega t}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \quad \text{folgt aus} \quad (11.91, \text{ S.355})$ $\vec{E}(P, t) = -\frac{\mu_0 \omega \hat{m}_z \cos \omega t}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{e}_\alpha \quad \text{folgt aus} \quad (11.91c, \text{ S.356})$ <p>Der magnetische Anteil ist gegen den elektrischen um $\pi/2$ phasenverschoben.</p>
<p>Fernzone (Wellenzone) (Näherung) $kr \gg 1$ $2\pi r \gg \lambda$</p> $\vec{E} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi \epsilon_0 c_0^2} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\vartheta \quad (11.80a, \text{ S.349})$ $\vec{B} = -\frac{\hat{p}_z \omega^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi \epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\alpha \quad (11.80b, \text{ S.349})$ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\omega^4 \hat{p}_z^2 \sin^2(\omega t_0^*)}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c_0^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \vec{e}_r \quad (11.81, \text{ S.349})$ <p>Energie wird mit einer zu ω^4 proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene $\vartheta = \pi/2$. E und B in der Wellenzone gleichphasig.</p>	<p>Fernzone (Wellenzone) (Näherung) $kr \gg 1$ $2\pi r \gg \lambda$</p> $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\vartheta \quad (11.92a, \text{ S.356})$ $\vec{E} = \frac{c_0 \mu_0 \hat{m}_z k^2 \sin(\omega t_0^*)}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \vec{e}_\alpha \quad (11.92b, \text{ S.356})$ $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 \hat{m}_z^2 \omega^4 \sin^2(\omega t_0^*)}{(4\pi)^2 c_0^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \vec{e}_r \quad (11.93, \text{ S.356})$ <p>Energie wird mit einer zu ω^4 proportionalen Intensität abgestrahlt, und zwar bevorzugt in der Ebene $\vartheta = \pi/2$. E und B sind in der Wellenzone gleichphasig</p>

A. Übungen & Beispiele

	Übungen		Beispiele Buch
Kap 1 1=1.1 2	Vektoranalytische Hilfsmittel Feldlinien Vektorfeld ψ durch Kreisscheibe		
Kap 2 3 4 C ZA8 C 5=2.1 6=2.2 7 C ZA4 8 C ZA5 C 9 ZA6 10=2.3 11	Ladung, Strom und EM-Feld q - gleichschenkliges Dreieck τ - Kreisring, E-Feld in der z-Achse Zylinder mit Flächenladung σ Ladungstransport im Cu- Draht / J, u F - zwischen parallelen Ströme Drehende, geladene Scheibe / I durch Ebene Drehende, geladene Kugel Flächenstromdichte in kreisförmigen Elektroden Flächenstromdichte in idealem Kondensator Bewegte q bewegter Linienstrom (B und Ableitung) F zwischen parallel zueinander bewegten q's F zwischen senkrecht zueinander bewegten q's	2.1.3 2.2.2 2.3.1a 2.3.1b 2.5.2	F von τ in z-Achse auf q in xy-Ebene K auf Torus-Luftspule, Strom-Verschmierung q(t), i(t) auf Dipolantenne Knotenregel Kirchhoff F parallel bewegter q
Kap 3 12=3.1 13=3.2 C2 14=3.3 15 ZA9 16, ZA11 17 ZA12 18=3.4 19=3.5 20 21 22 C ZA14 C 23 24 ZA15 ZA16 25 26 27 C	Maxwell's Equotations Coulombfeld / verschiedene Hüllen i-Kreis; Zylinderspule mit Flächenstrom F zwischen parallelen i-Leiter i - Rechteck - F auf eine Seite (Biot-Savart) i-Knick, F auf abgelenktes Leiterstück Knotenregel / Hülle, einseitig unendliche i's i fließt in ein q, B-Feld, Durchflutungsgesetz i fließt in Punkt, J heraus: B-Feld, Maxwell gültig Bewegte η -erfüllte Kugel Kugel-C mit Verluststrom innen Linien - i $\rightarrow \phi$ durch bewegtes Rechteck Vektorfeld - Feldlinien - div und rot B eines Rohres mit J, K in z-Richtung B eines Rohres mit J in α Richtung Bewegte q - Näherung E, B, (erfüllt Maxw. nicht) F zweier i - Schleifen aufeinander entgeg. gleich Halleffekt in i-durchfl. Draht, i- Verdrängung ! Kugelkondensator mit konst. E-Feld, ges. $\rho(r)$ Verschiedene Vektorfelder: Feldlinien bestimmen wie A 22, nur mit Maxwell differentiell gerechnet B-Feld zu A8, Grenzbed. von Elektroden	3.2.2 C 3.4.2a,b 3.6.1a 3.6.1b 3.6.1c C 3.7.4a 3.7.4b 3.7.4c	Endlicher Linien - i B-Feld mit Biot-Savart Φ durch bewegtes Rechteck E von η - erfüllter, σ -belegter Kugel B von zyl. Rohr in z-Richtung mit J, K in α -Richtungn wie A22 ! B von unendlichem Flächenstrom K E von unendl. σ B von Rohr mit diff. Maxwell \rightarrow A22 B von Rohr mit diff. Maxwell, Grenzbed.; \rightarrow A22
Kap 4 28=4.1 ZA20 29 C ZA23 ZA28 C 30=4.2 31=4.3 C 32=4.4 33 C ZA21 ZA22 C 34 35	Elektrostatik Apollonius -Kreise - q's Potentialflächen Influenz: p auf Metallkugel, Ersatzdipol, Kräfte σ - Kreisscheibe, ges. E(0,0,z), $\phi(0,0,z)$ E von 2 parallelen σ -Kreisscheiben, ϕ , Q, C von Kreisscheibe mit inhomog. σ -Dichte Äquipot.linien von Liniendipol τ , Apolloniuskreise E-Feld von σ - Langer Streifen F auf p, unter verschied. Beding. (siehe Kap. 4lu) ϕ von η - geladener Kugel mit Poisson E-Feld einer σ geladenen Hohl-Kugel, dE Ansatz E und ϕ von unendl. langem, hom. gelad. Zylind. E bzw B von σ bzw K belegten unendl. Flächen Wpot von p in E Feld, F auf p - inhomogenes Feld	4.1.1a C 4.1.1b C 4.2.2 4.4.1 4.4.2 4.4.4 4.6.2	ϕ von q Punktladung ϕ von τ Linienladung F auf p (quer zu E), siehe Kap. 4lu) ϕ von homog. gel. Kugel E-Feld von Liniendipol $\phi = \text{const.}$ im Faraday-Käfig W von homog. gel. Kugel

Kap 5	Metallische Leiter		
36 C	Ladungsdiffusion (nette Aufgabe)	5.4.4a C	„verlustbehaft. Kondensator“, J , φ , R
37	Corbino-Scheibe / Halleffekt	5.4.4b	Gebogener Körper, R
ZA24 C	Halleffekt, Hallwiderstand bei n- und p- Leitung	5.5.2a	Spiegel - q an Metallwand (s.a, A43)
38	Ladung / Dipol - Perpetum mobile ??	5.5.2b C	influ. Metallkugel in hom. E , φ mit Poisson
39	Platten C - Energie für Plattenbewegung	5.6.3	Theorie des Erdens (s.a. A47)
40=ZA25	Bewegte τ	5.6.7a	Platten-C
41 C	φ - von „verlustbehaftetem Kondensator“, R	5.6.7b	Kugel-C
42 C	R von Corbino-Scheibe für Sonderfall		
43=5.2	F auf q von influ. Metallwand, gesa. influ. Ladung		
44=5.3	Metallkugel influenziert /geerdet		
45	Metallkugel mit Hohlraum, E und φ		
ZA29	-“- und q im Hohlraum, φ und E		
46 C4	Influenzierte Metallkugel \rightarrow p-Ersatzdipol nichtleitföh. Kugel in leitf. Medium, p-Ersatz		
ZA26	p im Hohlraum eines Metalles: Kraft; s.a. ZA20		
47	Kugel und q , φ - koeffizienten, Theorie des Erdens		
48	Platten-C / σ , E- Feldüberlagerung		
49=5.4	Metallkugeln / φ - koef. allgemein, Spitzenwirk.		
50 C	Metallkugel, Ersatz p , E-Feld-RB \rightarrow Lsg. f. p		
51	Geladene Metallkörper / φ - Koeff. allgemein		
52	Zusatz - Bildchen		
	Mettalische Kreiszyylinder, Apollonius mit τ , C		
Kap 6	Magnetostatik		
53=6.1	i-Schleife: $F_{\text{mag}} = 0$, $T_{\text{mag}} = m \times B$	6.1.1 C	A von Linien-i
54=6.2 C	Koaxialkabel, 2 koax, stromtrag. Zylinder	6.4.2 C	L , B , φ , A von Torus-Spule
55=6.3	Rechteckige Ringspulen ineinander, M 's, L 's	6.4.4 a	M bei Torus-Sp. und i-Schleife
56=6.4	φ durch Kreisscheibe mit B von magn.	6.4.4 b	M bei 3 i-Schleifen
ZA31	Punktdipol		
ZA32	φ durch Kreissegment mit B von i-Schleife		
	φ durch Kreisscheibe mit B von i- Schleife		
57=6.5	Grenzbed. der Luftspule aus Bsp.2.2.2 überprüfen	6.4.4 c	M , φ bei verschiedenen i-Richtungen von Spulen
58=6.6	B-Feld von 2 Linien - i, Apolloniuskreise		
59=6.7	Rechteck - i / $L \rightarrow 2L$		
Kap 7	Induzierte quasistationäre Ströme		
60=7.1	A von Kreis - i	7.3.4 C	B , L , W von Koaxialleitung
61=7.2	Kreis - i \rightarrow E - ind zu A60	7.5.1 a	Bewegter Metallstab in B Feld \rightarrow E-Feld
62=7.3 C	Zylinderspule, B und E_{ind} , quasistationär	7.5.1 b	Bewegte Metallstäbe auf Schienen in B
63=7.4	Stromverdrängung	7.5.3 a	-“- mit Farradayscher Flußregel
64=7.5	Wirbelströme, harm. B-Feld zw. 2 Elektroden	7.5.3 b	Asynchron-Motor, „mathematisch“
65	Bewegte Leiterstäbe im B-Feld, s.a.Bsp. 7.5.1b		
66=7.6	Generator		
67=7.7	Luftspule und Stromschleife: M		

Kap 8 68=8.1 69=8.2 ZA38 70 71 C 72=8.3 73	Elektrisch polarisierbare Stoffe Platten - C mit P-Bereich Zylinder -C, E radial, mit verschiedenem ϵ $\epsilon(\rho)$, so daß E- konst. ist (über D-Feld) Platten - C, zylindrischer ϵ Bereich, s.a.Bsp8.5.2b Kugel, p Ersatz, polarisiert in hom. E-Feld Kügelchen polarisiert - F F zwischen 2 i - Schleifen	8.2.1a 8.2.1b 8.4.1 8.5.2 a 8.5.2 b 8.5.2 c	Pol. Kugel mit P im Vakuum \rightarrow E-Feld Pol. Stab Pol. Kugel im Vakuum \rightarrow D Platten-C mit ϵ quer Platten-C mit ϵ längs Pol. Kugel durch E_0 im Vakuum \rightarrow P, E-ges
Kap 9 74 9.1 75 76 77=9.2 C ZA43 C 78=10.1 79=9.3 C ZA39 80=9.4 81	Magnetisch polarisierbare Stoffe Permanentmagnet mit M; B, H mit K_{mag} Luftspule und Permanent -M, Vergleich über K 2 Spulen verbinden, Flüsse, Gesamt L Zylinderspulen ineinander, mit μ , K_{mag} Draht mit μ Dickwandiges Rohr mit hom. J und μ : B, H, K_{mag} Koax - Energie Ringkern mit Luftspalt Ringkern mit Luftspalt und Magnetisierung Hysteresekurve ∞ Scheibe mit $B_{\text{außen}}$, M, μ , K_{mag}	9.3.1 a 9.3.1 b ZA 40 ZA 41 C 9.4.1 a 9.4.1 b 9.6.3	Permanentmagnet mit M homogen magnetisierte Kugel mit M von Außenfeld magn. Kugel, B-Feld bestimmen permeables Kügelchen, M, m, F Torus-Spule \rightarrow M, H Permanent-Magnet, Div H Torus-Spule mit $\mu \rightarrow$ H, ϕ , B
Kap 10 78=10.1 82=10.2 83 84 85	Elektromagnetische Leistungsbilanz Koax - Energie S von Stromschleifen J - Verdrängung durch Wirbelströme - Rohr Generator - Drehmoment Doppelleitung	10.2.3 10.3.1 a 10.3.1 b 10.3.1 c 10.3.1 d	μ teilw. in Zylinderspule, F zieht μ -Teil hinein S von Draht mit κ , zyl. Leiter, E-Feld, S S von bew. q S von 2 zusammengebr. q S von Platten-C (ganz nett)
Kap 11 86 87=11.1 88=11.3 11.2 89 90 91=11.4 92 93 94 95 96 97	Retardierte Lösungen der Maxwell Gleichungen K harmon. Flächenstrom: E und B Wellen K sprungartig, E- und B Wellen ψ_E eines Stromes innerhalb von $c_0 t$ Linien - i , Rampe $i = kt$ Bewegte Platte F auf Dielektrikum, Platten C mit teilweise ϵ m <u>und</u> p Wellen = Hertz & Fitzgerald Dipol Drahtschleifen Induktion, U - Messung Zyl.spulen drehbar, Induktion, i- Permanent-M p, S - Mittelwert Faraday-Scheibe Gegeninduktion im Einzelnen - Diagramm Bewegte Leiterschleife ins B-Feld, F_a , i	11.4.6 a,b 11.4.6 c 11.5.1 11.6.1	Linear pol. ebene Welle, Wellen von K, S.334ff Wellen von i, siehe auch S.338 Hertz - p mit $p_z = kt^2$ Fitzg - m mit $m_z = kt$

B. E - und B - Feld

E-Feld		B-Feld	
Kräfte	$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{21} = -\vec{F}_2$	Kräfte	$\frac{\Delta \vec{F}_1}{\Delta s} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r_{12}} \vec{e}_{21} = -\frac{\Delta \vec{F}_2}{\Delta s}$
Ursachen	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$	Ursachen	$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}})$ $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0$
Potential + Eigenschaften	$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi$ $\varphi(P) = -\int_{r_0}^P \vec{E} d\vec{r}$	Potential + Eigenschaften	$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0$ $\Phi = \oint_K \vec{A} d\vec{r}$
DGL	$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	DGL	$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$
Punktladung	$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ $r_0 \rightarrow \infty$	Biot-Savart	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV$ $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' ^3} dV$
Linienladung	$\varphi(\rho) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$ $\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho$	Linien-strom	$A_z(\rho) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0}$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha$
Dipol	$l \rightarrow 0 \quad \vec{p} = \text{const}$ $\varphi(P) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\vec{E} = \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$	Dipol	$a \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \vec{m} = ia\vec{n} = \text{const}$ $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 (\vec{m} \times \vec{e}_r)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\alpha$ $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta)$
Polarisation	$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$ $\vec{P} = \rho_0 \vec{l}$	Magnetisierung	$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$ $\vec{m} = i\vec{a}$
Kräfte, Drehmoment	$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$ $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times \vec{E}$	Kräfte, Drehmoment	$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$ $\vec{T} = \vec{r} \times (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{m} \times \vec{B}$
Polarisationsladungen	$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{pol}$ $\sigma_{pol} = \frac{dQ_{versch}}{da} = \vec{P} \cdot \vec{n}$	Magnetisierungsströme	$\vec{J}_{mag} = \operatorname{rot} \vec{M}$ $\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \vec{n}$
	$\operatorname{Div} \vec{P} = \vec{n} \cdot (\vec{P}^+ - \vec{P}^-) = -\sigma_{pol}$		$\operatorname{Rot} \vec{M} = \vec{n} \times (\vec{M}^+ - \vec{M}^-) = \vec{K}_{mag}$
Polarisationsstrom	$\operatorname{div} \vec{J}_{pol} + \dot{\rho}_{pol} = 0$ $J_{pol} = \rho_0 \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{P}}$		$\operatorname{div} \vec{J}_{mag} = 0$ $\oint_K \vec{M} \cdot d\vec{r} = I_{mag}$
Materialgrößen, Hilfsfeld	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$	Materialgrößen, Hilfsfeld	$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$ $\chi_m > 0 \quad \text{paramagnetisch}$ $\chi_m < 0 \quad \text{diamagnetisch}$

Freie Ladungen und Verschiebungsdichte	$\rho = \rho_{pol} + \rho_f$ $\vec{J} = \vec{J} + \vec{J}_{pol}$ $div \vec{D} = \rho_f$ $\frac{1}{\mu_0} rot \vec{B} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$	Freie Ströme und magnet. Feldstärke	$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_{mag} + \vec{J}_{pol}$ $rot \vec{H} = \vec{J}_f + \dot{\vec{D}}$
	$\sigma = \sigma_{pol} + \sigma_f$ $Div \vec{D} = \sigma_f$ $Rot \vec{D} = Rot \vec{P}$		$\vec{K} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$ $Rot \vec{H} = \vec{K}_f$ $Div \vec{H} = -Div \vec{M}$ $\frac{1}{\mu_0} Rot \vec{B} = \vec{K}_{mag} + \vec{K}_f$
Grenz-flächen zw. versch. Dielektrika	$Div \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{pol}$ für $\sigma_f = 0$ $Rot \vec{E} = \vec{0}$ $Div \vec{D} = 0$ für $\sigma_f = 0$ $Rot \vec{D} = Rot \vec{P}$	Grenz-flächen zw. versch. permeab. Bereichen	$Rot \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{mag}$ für $\vec{K}_f = \vec{0}$ $Div \vec{B} = 0$ $Rot \vec{H} = 0$ für $\vec{K}_f = \vec{0}$ $Div \vec{H} = -Div \vec{M}$

Einheiten

E-Feld			B-Feld		
Größe	Gleichung	Einheit	Größe	Gleichung	Einheit
Stromstärke	$I = \frac{dQ}{dt}$	A	induzierte Spannung	$U = -N \frac{d\Phi}{dt}$	V
Ladung	$Q = It$	C=As	magnetischer Fluß	$\Phi = BA$	Wb=Vs
Spannung	$U = Es$	V	Spannung	$V = Hl$	A
Verschiebungsdichte	$D = \frac{Q}{A}$ $D = \epsilon E$	As/m ²	Induktion, Flußdichte	$B = \frac{\Phi}{A}$ $B = \mu H$	T=Vs/m ²
Feldkonstante	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$	F/m=As/(Vm)	Feldkonstante	$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c_0^2}$	H/m=Vs/(Am)
Permittivität	$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$	F/m=As/(Vm)	Permeabilität	$\mu = \mu_0 \mu_r$	H/m=Vs/(Am)
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	F=As/V	Induktivität	$L = \frac{\Phi N}{I}$	H=Vs/A
Plattenkondensator	$C = \frac{\epsilon A}{s}$	F	Zylinderspule	$L = \frac{\mu AN^2}{l}$	H
Feldenergie	$W_F = \frac{CU^2}{2}$	J	Feldenergie	$W_F = \frac{LI^2}{2}$	J
Plattenkondensator	$W_F = \frac{\epsilon E^2 V}{2}$	J	Ringspule	$W_F = \frac{\mu H^2 V}{2}$	J
Energiedichte	$w = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2}$	J/m ²	Energiedichte	$w = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$	J/m ²

C. Besondere Anordnungen

Punktförmiges

Punktladung (ruhend) im Ursprung des Koordinatensystems

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{bez. Fernkugel}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Grundlage für die Berechnung vieler anderer Formen mit dem dq Ansatz.

- Berechnung über integrales Maxwellgesetz (3.41, S.105)

(Bsp.4.1.1a)

bewegte Punktladung, genähert durch 2.28, S.73

Maxwellgleichung 3.2, S.82 wird nicht erfüllt; Formel ist wirklich nur eine Näherung

- Berechnung der Rotation und der Divergenz im Kugelkoordinatensystem

(A23)

Punktdipol (ruhend) in z-Richtung ausgerichtet und im Ursprung des Koordinatensystems liegend

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad \text{wenn } l \rightarrow 0 \quad \text{und } \vec{p} = \text{const}$$

(4.14, S.130)

$$\varphi(P) = \left\langle \frac{ql \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right\rangle_z = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(4.13, S.129)

$$\vec{E} = \frac{P_z}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta)$$

(4.15, S.130)

Linienhaftes

„endliche Linienladung τ “, die von -l bis +l auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt

$$\varphi(\rho, \alpha, 0) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\rho_0 \cdot (l + \sqrt{\rho^2 + l^2})}{\rho \cdot (l + \sqrt{\rho_0^2 + l^2})} \right]$$

Potential in der xy-Ebene bez. der Abstandes ρ_0

$$\vec{E}(\rho, \alpha, 0) = \vec{e}_\rho \cdot \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{l}{\rho \cdot \sqrt{\rho^2 + l^2}}$$

E-Feld in der symmetrisch liegenden xy-Ebene

- Berechnung durch Superposition von dq Elementen
126)

(Bsp. 4.1.1.b, S.

„unendliche Linienladung τ “, die von $-\infty$ bis $+\infty$ auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho}$$

(4.8)

bez auf den Abstand ρ_0 des Bezugspotentials

$$\vec{E}(\rho, \alpha, z) = \vec{e}_\rho \cdot \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho}$$

(4.9)

- Berechnung durch Grenzwertübergang aus endlicher Linienladung

(Bsp. 4.1.1.b, S.127)

„unendliche, bewegte Linienladung τ “, die von $-\infty$ bis $+\infty$ auf der z-Achse geht, d.h. symmetrisch zur xy-Ebene liegt und sich mit u_x in x-Richtung bewegt

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\tau u_x}{2\pi\epsilon_0 \rho^2} (\sin\alpha \cdot \vec{e}_\alpha + \cos\alpha \cdot \vec{e}_\rho)$$

aus 3.4 S.82 und Vorgaben

$$\vec{B} = B(\rho, \alpha) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \tau u_x \sin\alpha}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_z$$

- Ansatz aus unendlicher Linienladung, mit veränderlichen Koordinaten

- Berechnung des B-Feldes über Maxwell und die zeitliche Ableitung des „statisch gerechneten“ E-Feldes

(A40)

Linienidipol mit Belag $\pm\tau$, in z-Richtung zeigend; Pole liegen im Abstand l voneinander in der xz-Ebene; τ gehört zu ρ_1

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\rho_1} \vec{e}_{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \vec{e}_{\rho_2} \right]$$

mit den jeweiligen Einzelabständen und den Richtungsvektoren (4.19, S.134)

$$\varphi(P) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Bezugspotential liegt genau in der Mitte zwischen den Leitern

- Potentiallinien sind Apolloniuskreise, Siehe dazu Lsg A4.2, E-Feldlinien siehe S.134

- Berechnung durch Superposition zweier unendlicher Linienladungen

(Bsp. 4.2.3, S.134; A4.2)

gerader Teil eines Linienstromes, in der z-Achse liegend, von z_1 bis z_2 mit dem Strom i , in z-Richtung gezählt

$$\Delta \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right] \vec{e}_\alpha \quad \text{Beitrag zum B-Feld} \quad (3.11a, S.88)$$

- B.S.

Unendlicher Linienstrom, in der z-Achse, mit i in z-Richtung gezählt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\alpha \quad (3.11b, S.88) \quad \vec{A} = \vec{e}_z \cdot \frac{-\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad \rho_0 \text{ Abstand des Bezugspunktes (Bsp 6.1.1, S.195)}$$

- Durchflutungsgesetz, differentielle Beziehungen zwischen A und B

Unendlicher Leiter mit homogener Stromdichte J , in z-Richtung zeig., J in z-Richtung gezählt und mit Leitfähigkeit κ

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \mu_0 \begin{cases} \frac{J}{2} \rho & 0 \leq \rho < R \\ \frac{JR^2}{2\rho} & \rho > R \end{cases}$$

$\vec{E} = \frac{J}{\kappa} \vec{e}_z$ im ganzen Raum (wegen Grenzbedingungen), wenn J nicht zeitlich veränderlich ist!, sonst anderes ohmsches Gesetz.

- ohne Gewähr, selber gerechnet.

Unendlicher Draht mit homogenem, freiem J und Permeabilität μ_r , in z-Richtung zeigend, Radius R , Strom I_f

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \frac{I_f}{2\pi R^2} \rho & 0 < \rho < R \\ \frac{I_f}{2\pi \rho} & R < \rho \end{cases} \quad \vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \mu_r \mu_0 \frac{I_f}{2\pi R^2} \rho & 0 < \rho < R \\ \mu_0 \frac{I_f}{2\pi \rho} & R < \rho \end{cases}$$

Magnetisierungsströme:

$$\vec{J}_{mag} = (\mu_r - 1) \frac{I_f}{\pi R^2} \vec{e}_z \quad \vec{K}_{mag} = (1 - \mu_r) \frac{I_f}{2\pi R} \vec{e}_z$$

- Integrales Maxell

(A77=9.2)

2 unendliche, parallele Leiter mit $+i$ und $-i$

- B-Feldlinien sind Apoloniuskreise

(A58=6.6)

Doppelleitung, 2 Leiter mit $+i$ und $-i$, Radius ρ_0 und Mittelpunktabstand D

$$\frac{L}{l} = \mu_0 \frac{h}{\pi} \ln \frac{D - \rho_0}{\rho_0} \quad \text{Selbstinduktivität pro Länge}$$

- Maxwell integral und Flußberechnung

(A85)

Linienhafter, mit τ geladener Kreisring, übt Kraft auf eine Punktladung aus, Ausrichtung in z- Achse, Radius R

$$\vec{E}(0,0,z) = \vec{e}_z \cdot \frac{R \cdot \tau \cdot z}{2\epsilon_0 \cdot \sqrt{z^2 + R^2}^3}$$

- Superposition von dq Elementen

(A4)

Linienförmiger Kreisstrom i , Ausrichtung des Kreises in z-Achse, des Stromes in e_α , Radius R , Mitte ist auf der z- Achse

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2\sqrt{R^2 + z^2}^3} \cdot \vec{e}_z$$

- B.S.

(A13=A3.2)

Vektorpotential auf der z- Achse: $\vec{A}(0,0,z) = 0$, außerhalb nur α Komponente

(A60=7.1)

Flächenförmiges

unendliche geladene Fläche mit Flächennormale in z-Richtung und homogener Flächenladung (aus A29)

$$\varphi = \infty \quad \text{bez. Fernkugel;} \quad \varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z| \quad \text{bez. der Fläche}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z) \cdot \vec{e}_z \quad (3.70, \text{ S.120})$$

- Berechnung durch Grenzwertübergang aus endlicher Fläche, z.B. kreisförmige Scheibe (Bsp.3.7.4a)

unendliche, flächenstrombehaftete Fläche, Flächennormale in z-Richtung, Flächenstrom K zeigt in y-Richtung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K_y}{2} \operatorname{sgn}(z) \cdot \vec{e}_x \quad (3.45, \text{ S.112}) \quad \text{Rechte Hand Regel !!!}$$

- Berechnung durch Maxwell oder über Grenzbedingungen und Symmetrieüberlegungen (Bsp. 3.6.1.c, S.111)
 - sinusförmiger Strombelag, siehe dazu Ausbreitung in Bsp.11.4.6, S.333ff, vor allem S.336! (A86)

unendlich lange, endlich breite, geladene Fläche, in z-Richtung unendlich lang, geht von $x=-h$ bis $x=h$, $y=0$, mit σ geladen
 φ extrem komplexer Ausdruck, entstehend aus $\ln(x^2+y^2)$..., nur mit Maple...

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2} \ln \left[\frac{(x+h)^2 + y^2}{(x-h)^2 + y^2} \right] \cdot \vec{e}_x + \left[\arctan \frac{x+h}{y} - \arctan \frac{x-h}{y} \right] \cdot \vec{e}_y \right]$$

- Superposition unendlicher Linienladungen (A31=A4.3)

2 unendliche, dickwandige, leitende, parallele, geladene Platten, im Abstand l voneinander, mit Ladung Q_1 (die linke) und Q_2 (die rechte), Flächen A und Ausrichtung in z-Richtung

- ges. sind die inneren (σ_1' , σ_2') und äußeren (σ_1'' , σ_2'') Flächenladungsdichten, so daß sich das E-Feld in den Platten zu ergibt!

$$\sigma_1'' = \sigma_2'' = \frac{Q_1 + Q_2}{2A} \quad \sigma_1' = -\sigma_2' = \frac{Q_1 - Q_2}{2A}$$

- die E-Feld verteilung ist dann

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_z \cdot \begin{cases} -\frac{\sigma_2'}{\epsilon_0} = -\frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0} & z < 0 \\ \frac{\sigma_1'}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2}{2\epsilon_0} & 0 < z < l \\ \frac{\sigma_2''}{\epsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\epsilon_0} & l < z \end{cases}$$

- Überlagerung unendlicher, geladener Flächen mit Zusatzbedingung fürs E-Feld (A48)

Kreisförmige, geladene Scheibe mit Radius R , Flächennormale in z-Richtung und homogener Flächenladung σ

$$\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right] \quad \text{bez. Fernkugel} \quad \varphi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| - R \right] \quad \text{bez. Scheibenmittelpunkt}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{-z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \operatorname{sgn}(z) \right] \cdot \vec{e}_z \quad \text{E-Feld auf der z-Achse}$$

- Berechnung durch Superposition und Integration punktförmiger Ladungen dq ($d\varphi$ und dE , dE mit Symmetrieüberlegung)
 - entartet zu unendliche Flächenladung (A29)

Kreisförmige, inhomogen geladene Scheibe mit Radius R , Flächennormale in z-Richtung

$$\sigma = \frac{k}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad \text{ist gegeben. ges. Kapazität. Bestimmung von } Q \text{ und } \varphi(0) \rightarrow C$$

$$Q = 2\pi k R \quad \varphi(x, y, z = 0,0,0) = k \frac{\pi}{4\epsilon_0} \quad C = \frac{Q}{\varphi(0)} = 8\epsilon_0 R$$

2 solche Scheiben im Kondensatorbetrieb nebeneinander:

$$C = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{2\varphi_1} = 4\epsilon_0 R$$

- Überlagerung von $d\varphi$ Elementen von $dq = \sigma da$ Ladungen, und Integration; $z=0$ vorher gleich einsetzen! (ZA28)

Kreisförmige, rotierende, geladene Scheibe, Scheibe rotiert um Figurenachs z mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstanter Flächenladungsdichte σ

$$\vec{K}(\rho) = \vec{e}_\alpha \cdot \omega \cdot \rho \cdot \sigma \quad \text{Flächenstromdichte}$$

(A7)

Dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenladung σ ,

Radius R, Ausrichtung in z-Richtung, Mitte ist z-Achse, Ausdehnung ist von Z_1 bis Z_2

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(z-z_2)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z-z_1)^2 + R^2}} \right] \cdot \vec{e}_z \quad \text{E-Feld auf der z-Achse}$$

$$\vec{E}(0,0,z) = 0 \quad \text{bei unendlicher Ausdehnung !}$$

- Ansatz aus $\tau = \sigma dz$ -Elementen von A4

(ZA8)

Dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenstrom K_α , Ausrichtung in z-Achse, Länge von z_1 bis z_2 , Radius R

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 K_\alpha}{2} \left[\frac{z-z_1}{\sqrt{R^2 + (z-z_1)^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{R^2 + (z-z_2)^2}} \right] \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(0,0,z) = \mu_0 K_\alpha \cdot \vec{e}_z \quad \text{bei unendlicher Länge !}$$

-B.S. oder differentielle Kreisstromelemente

(A13=3.2)

Unendlich langer, dünnwandiger Kreiszyylinder mit Flächenstrom in α Richtung

$$\vec{B}(\rho) = \begin{cases} \mu_0 K_\alpha \cdot \vec{e}_z & 0 \leq \rho < R \\ 0 & R < \rho \end{cases} \quad \text{ind. E-Feld:} \quad \vec{E}_{ind}(\rho) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{d}{dt} [K_\alpha(t)] \cdot \vec{e}_\alpha \begin{cases} \cdot \rho & 0 \leq \rho < R \\ \frac{R^2}{\rho} & r < \rho \end{cases}$$

- Maxwell's quasistationäre Gleichungen (integral oder differentiell)

(A62=7.3)

falls K_α durch N Windungen von i erzeugt wird, dann gilt:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 Ni}{l} \vec{e}_z & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

$$K_\alpha = \frac{Ni}{l}$$

- Maxwell integral trivial

(A67=7.7)

2 parallele, dünnwandige, geladene Zylinder unendlicher Länge, je mit Radius R und vorzeichenverschiedener Ladung

- Beschreibung durch 2 Linienladungen, die Apolloniuskreise für das Potential bilden, 2 der Kreise seien die realen Zylinder

- Bild dazu siehe A52

- Bestimmung der Anordnung der Kapazität

- Apollonius- Ansatz konstanten Potentials

(A52)

Räumliches

homogen geladene Kugel mit Oberflächenladung, Mittelpunkt liegt im Ursprung, Radius R, Dichten ρ_0 und σ_0

$$Q(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 & 0 < r < R \\ \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3 + \sigma_0 4\pi R^2 & R < r \end{cases} \quad \vec{E} = \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r & 0 < r < R \\ \left[\frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0} \right] \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R < r \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) + \frac{R\sigma_0}{\epsilon_0} & 0 < r < R \\ \frac{Q_{ges}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & R < r \end{cases}$$

- Berechnung über Poissonsche DGL mit Grenzbedingungen

(ρ : A33)

- Maxwell und Symmetrieüberlegungen

(E: Bsp 3.6.1.a, S. 107, φ : Bsp 4.4.1, S.137)

homogen mit σ oberflächlich geladene, rotierende Kugel, Kugel liegt im Ursprung, Radius R, z ist Rotationsachse

$$\vec{K} = \sigma \omega_z R \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\alpha$$

(ZA4 zu A7)

Dickwandiges stromdurchfl. Rohr unendlicher Länge mit homogener Stromdichte J_z und Oberflächenstrom (außen) K_z in Richtung z-Achse

Innenradius R_1 , Außenradius R_2

$$I(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho < R_1 \\ J_z \pi \cdot (\rho^2 - R_1^2) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ J_z \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) + K_z \cdot 2\pi R_2 & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} + \mu_0 K_z \frac{R_2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

- Integrale und differentielle Maxwellgleichungen

(A22, A26)

Dickwandiges, stromdurchfl. Rohr mit Permeabilität unendlicher Länge mit homogener, freier Stromdichte J_z

Innenradius R_1 , Außenradius R_2

$$I_f(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho < R_1 \\ J_z \pi \cdot (\rho^2 - R_1^2) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ J_z \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{H} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \frac{\mu J_z}{2} \frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ \frac{\mu_0 J_z}{2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\rho} & \text{für } R_2 < \rho \end{cases} \quad \vec{J}_{mag} = J_z \vec{e}_z \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \rho < R_1 \\ \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) & \text{für } R_1 < \rho < R_2 \\ 0 & \text{für } R_2 < \rho \end{cases}$$

$$\vec{K}_{mag} = \vec{e}_z \cdot \frac{J_z}{2} \begin{cases} 0 & \rho = R_1 \\ \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right) \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2} & \rho = R_2 \end{cases} \quad I_{mag} = 0 \text{ durch den Querschnitt des Drahtes}$$

- Durchflutungsgesetz, Maxwell differentiell mit Randbedingungen

(ZA43)

Dickwandiges Rohr unendlicher Länge mit homogener Stromdichte J_α in α Richtung ,

Mitte ist z-Achse, innen R_1 , außen R_2

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_z = \begin{cases} \mu_0 J_\alpha (R_2 - R_1) & 0 \leq \rho \leq R_1 \\ \mu_0 J_\alpha (R_2 - \rho) & R_1 < \rho \leq R_2 \\ 0 & R_2 < \rho \end{cases}$$

- Integrale Maxwell und Symmetrieüberlegungen für Ansatz, A13 als Grenzbedingung innen, Durchflutungsgesetz (ZA14)

Koaxialleiter, innen homogene Stromdichte bis ρ_1 , außen Flächenstrom bei ρ_2 ,

Mitte = z-Achse, Innenstrom fließt in z-Richtung

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho < \rho_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ 0 & \rho_2 < \rho \end{cases}$$

$$W = \frac{I^2}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{gespeicherte Feldenergie; } L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \cdot \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad \text{Induktivität der Leitung}$$

- Maxwell integral, Formel für Arbeit, Definition der Induktivität

(Bsp.7.3.4, S.233)

Koaxialleiter, 2 stromtragender koax. Zylinder, Mitte ist z-Achse

Innenleiter Radius ρ_1 und homogenem Gleichstrom I_1 , Außenleiter zwischen ρ_2 und ρ_3 mit homogenem Strom I_2 in z-Richt. gezählt

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{cases} I_1 \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ \frac{I_1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ \left[I_1 + I_2 \frac{\rho^2 - \rho_2^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right] \cdot \frac{1}{\rho} & \rho_2 \leq \rho \leq \rho_3 \\ \frac{I_1 + I_2}{\rho} & \rho_3 \leq \rho \end{cases}$$

falls $I_1 = -I_2$ „Außenleiter als Rückleiter“, gilt:

$$\vec{B} = B(\rho) \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \begin{cases} I_1 \frac{\rho}{\rho_1^2} & 0 \leq \rho \leq \rho_1 \\ \frac{I_1}{\rho} & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ \left[I_1 \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2} \right] \cdot \frac{1}{\rho} & \rho_2 \leq \rho \leq \rho_3 \\ 0 & \rho_3 \leq \rho \end{cases}$$

- Berechnung durch integrale Maxwellgesetze

(A54=6.2)

Unendlich langer Zylinder mit homogener Raumladungsdichte η innen, Mitte ist z-Achse, Radius R

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{\eta}{4\epsilon_0} (R^2 - \rho^2) & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{\rho} & \rho > R \end{cases}$$

Potential ist bezogen auf der Zylinderoberfläche !

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \begin{cases} \frac{\eta}{2\epsilon_0} \rho & 0 \leq \rho \leq R \\ \frac{\eta}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{\rho} & \rho > R \end{cases} \quad \text{n.kraass}$$

- Poisson's DGL oder integrales Maxwell und Symmetrieüberlegungen (ZA22)

Influenz von einer Punktladung q auf eine unendliche, metallische Fläche

Fläche = xy-Ebene, Punktladung liegt auf pos. z-Achse

von der Influenzierten Ladung (liegt genau spiegelbildlich zu q) erzeugte E-Felder

$$\vec{E}^\sigma = -\vec{E}^q = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{rq}}{r^2} \text{ für } z < 0, \text{ d.h. im Metall (oder im leeren Halbraum), denn } E_{\text{ges}} = 0 \text{ nach (5.37, S.171) im Metall}$$

$$\vec{E}^\sigma = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{\sigma q}}{r_{\sigma q}^2} \text{ für } z > 0, \text{ d.h. von } \sigma \text{ erz. Feld im Halbraum der Ladung q, deren E-Feld sich mit diesem überlagert!}$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_z^+ = \epsilon_0 \lim_{z \rightarrow 0} E_z^+ = \frac{-q}{2\pi} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}^3} \quad \text{influenzierte Flächenladungsdichte nach (5.41, S.175)}$$

$q_{\text{influenz}} = -q$ gesamte influenzierte Ladung

- Influenzgesetze, siehe 5.37 und 5.38 S.171

(Bsp. 5.5.2a, S.174, A43=5.2)

„verlustbehafteter Kondensator“ = „homogen leitfähiger, zylindrischer Körper mit idealen Elektroden“
an den Stirnseiten, der Länge l und Radius R mit konstanter Innenstromdichte, ideal leitenden Elektroden und linienhafter Stromzuführung i; der Körper und der Linienstrom sind in z-Richtung ausgerichtet

$$\vec{K} = \vec{e}_\rho \cdot \frac{i}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \text{ Oberflächenstromdichte der scheibenförmigen Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

- Kontinuitätsgleichung

(A8)

außerhalb des „Kondensators“ ist das Magnetfeld identisch dem eines unendlichen linienförmigen Leiters (s.o, Linienhaftes);
innerhalb des „Kondensators“ gilt:

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \cdot \begin{cases} \mu_0 \frac{i}{\pi R^2} \frac{\rho}{2} & 0 < \rho < R \\ \mu_0 \frac{i}{2\pi\rho} & R < \rho \end{cases}$$

- differentielle Maxwellgleichungen mit Grenzbedingungen

(A27)

$$\varphi(z) = \frac{-i}{\kappa\pi R^2} z + C$$

- aus Randbedingung, Poissonsche DGL

(A41)

kreisförmiger Kondensator mit homogener, zeitabh. Flächenladung, und i(t) Zufluß, Ausrichtung in z-Richtung, Radius der Elektroden ist R

$$\vec{K} = \vec{e}_\rho \cdot \frac{i}{2\pi\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \text{ Oberflächenstromdichte der scheibenförmigen Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \frac{1}{\pi R^2} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \text{Oberflächenladung der Elektrode, auf die der Stromzählrichtungspfeil zeigt.}$$

- Kontinuitätsgleichung

(ZA5 zu A8)

torusförmige Spule mit rechteckigem Querschnitt und n-Strom-Windungen

Innenradius ρ_1 , Außenradius ρ_2 , Höhe l, Strom rechtshändig zum Fluß, Ausrichtung in z-Richtung

$$\vec{B} = \vec{e}_\alpha \frac{\mu_0 Ni}{2\pi\rho} \text{ im Torus-Ring, sonst 0; } \quad \Phi_Q = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi} l \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{Querschnittsfluß}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} l \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{Selbstinduktivität}$$

- Durchflutungsgesetz

(Bsp.6.4.2, S.209)

Weicheisenring mit Luftspalt, N-Strom-Windungen

$$\vec{B} = \frac{Ni}{\frac{l_E}{\mu} + \frac{l_L}{\mu_0}} \vec{e}_\alpha \text{ innerhalb des Ringes (auch im Luftspalt)}$$

$$L = \frac{N^2 a}{\frac{l_E}{\mu} + \frac{l_L}{\mu_0}}$$

- Maxwell integral

(A79=9.3)

Metallkugel mit Hohlraum und Ladung Q

- Q liegt als Flächenladung auf der äußeren Fläche, Grund: Maxwell 3.41a,b und kein E-Feld im Metall !

$$\rho_{\text{Hohlraum}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{Potential des Hohlraumes bez. Fernkugel; Grund: } \varphi \text{ und } E \text{ sind stetig, } E=0 \text{ im Metall}$$

- E=0 im Metall, Stetigkeit von E am Hohlraumrand, Poisson Ansatz und RB

von einem homogenen E-Feld Influenzierte Metallkugel

- Ersatzpunktdipol für leitende Kugel in einem nichtleitendem Medium mit äußerem E-Feld;

äußeres hom. E-Feld (E_0) zeigt in z-Richtung, Punktdipol ist im Ursprung und zeigt ebenfalls in z-Richtung, Kugel habe Radius R

- Überlagerung der Felder ergibt, wenn die Tangentialkomponente am Rand der leitenden Kugel verschwinden soll (das E-Feld tritt aus einem Metall (fast) immer senkrecht raus) für den die Kugel ersetzenden, die Randbedingungen erfüllenden Punkt-Dipol:

$$p_z = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

$$\vec{E}_{\text{Kugelrand}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{Dipol}} = \vec{e}_r \cdot \cos\vartheta \cdot 3E_0 \quad \text{nur an der Kugeloberfläche, keine Tangentialkomponente, also RB erfüllt}$$

- Gesamtes E-Feld im Raum durch Überlagerung der einzelnen Komponenten

(A46)

$\sigma_{\text{inf}} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta$ auf der Oberfläche der Metallkugel influenzierte Flächenladung

$$\vec{E}_{\text{ges}} = E_0 \left[\vec{e}_r \cos\vartheta \cdot \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) + \vec{e}_\vartheta \sin\vartheta \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \right]$$

- einfache E-Feldüberlagerung

(A50)

$$\varphi = E_0 \left[\frac{R^3}{r^2} - r \right] \cos\vartheta \quad \text{außerhalb der Kugel !}$$

- Poisson-Ansatz, Eindeutigkeit der Lösung, Randbedingungen fürs Potential

(Bsp.5.5.2b, S.176)

elektrisch polarisierte Kugel mit P in z-Richtung, Kugel liegt im Koordinatenursprung, Radius R,

Polarisation in z-Richtung

$$\vec{E}^{(pol)} = \begin{cases} -\frac{P_0}{3\epsilon_0} & r < R \\ \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \frac{1}{r^3} (2 \cos\vartheta \cdot \vec{e}_r + \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta) & r > R \end{cases} \quad (8.13, \text{S.254, Bsp.8.2.1a})$$

- aus Vergleich mit influenzierter Kugel

von einem homogenen E-Feld E_0 polarisierte, homogen dielektrische (ϵ) Kugel im Vakuum

von einem homogenen E-Feld polarisierte, homogen dielektrische (ϵ_1) Kugel in einem Dielektrikum ϵ_2

man ersetze nur ϵ_0 durch ϵ_2 und ϵ durch ϵ_1 , oder umgekehrt, je nach Notwendigkeit !

Kugelmittelpunkt liegt im Ursprung, Radius R

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_{\text{pol}} = \frac{-\vec{P}_0}{3\epsilon_0}$$

nur in der Kugel !

(8.13a, S.254)

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

nur in der Kugel, außen keine Polarisation

(8.46, S.267)

$$\vec{E} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \vec{E}_0 \quad \text{nur in der Kugel !}$$

$$\vec{E}_{\text{pol}} = \begin{cases} -E_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \cdot \vec{e}_z & r < R \\ \frac{R^3}{r^3} E_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} (2 \cos\vartheta \vec{e}_r + \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta) & R < r \end{cases}$$

durch die Polarisation hervorgerufenes Feld

$$\sigma_{\text{pol}} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \cos\vartheta \quad (\text{hier muß das erste } \epsilon_0 \text{ unbedingt stehen bleiben!, aus Grenzbedingungen!})$$

• E_{ges} - Feld siehe S.267

- siehe Beispiel

(Bsp8.5.2c, S.266)

- aus verschiedenen Beispielen zusammengestückt

(A71)

Nichtleitende Kugel in einem leitendem Medium mit äußerem, homogenem J-Feld, Ersatz-Punktdipol

äußeres J-Feld ($J = \kappa E_0$) zeigt in z-Richtung, Punktdipol ist im Ursprung und zeigt ebenfalls in z-Richtung, Kugel habe Radius R

- Überlagerung der Felder ergibt, wenn die Radialkomponente am Rand der nichtleitenden Kugel verschwinden soll (Es fließt ja kein Strom in die Kugel hinein!) für den die Kugel ersetzenden Dipol:

$$p_z = -2\pi\epsilon_0 R^3 E_0$$

$$\vec{E}_{rand} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{Dipol} = \vec{e}_\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \frac{-3}{2} E_0 \quad \text{nur an der Kugeloberfläche, keine Radialkomponente, also RB erfüllt}$$

- Gesamtes E-Feld und $J=\kappa E$ -Feld im Raum außerhalb durch Überlagerung der einzelnen Komponenten (A46)

hom. E-Feld Kompensation, Radialkomponente des äußeren E-Feldes an einer Kugel kompensieren

siehe: Influenzierte Metallkugel (A46)

hom. E-Feld Kompensation, Tangentialkomponente des äußeren E-Feldes einer Kugel kompensieren

siehe: Nichtleitende Kugel in einem leitendem Medium mit äußerem J-Feld, Ersatz-Punktdipol (A46)

magnetisch polarisierte Kugel, Kugel liegt im Koordinatenursprung, Radius R, Magnetisierung M_0 in z-Richtung
H-Feld korrespondiert mit E-Feld einer elektrisch pol. Kugel; dies folgt aus Vergleich von Wirbel und Quellen.

Ergebnis: $M_0 \cong \frac{P_0}{\epsilon_0}$, dieses oben in el. pol. Kugel einsetzen und man erhält statt E-, das H-Feld

- aus Vergleich mit elektrisch polarisierter Kugel nach Bsp. 8.2.1a, S.252; aus Klausur Herbst '90

magnetisch permeable Kugel, Radius R, mit μ , Kugel wird durch ein homogenes Außenfeld H_0 magnetisiert für das Gesamtfeld in der Kugel gilt:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \text{damit also dann} \quad \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}$$

Die Beziehung zwischen Gesamtfeld H in der Kugel und dem verursachendem Feld H_0 außen ist, analog wie bei einer polarisierbaren Kugel ($D=B$, $E=H$) dann:

$$\vec{H} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 \quad \text{und so ist} \quad \vec{M} = \frac{3(\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0$$

Ist das Kügelschen klein, und H_0 und damit M deshalb näherungsweise konstant, dann läßt sich die Beziehung

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad \text{vereinfachen zu:} \quad \vec{m} = \frac{4}{3} R^3 \pi \vec{M}$$

womit das magnetische Moment der kleinen Kugel berechnet wäre

- Dualität zwischen E- und B-Feld ! (ZA41)

Corbino-Scheibe = kurzer, coaxialer Zylinder mit n-leitendem Material im Zwischenraum A5.1

- Widerstand ist B-Feld abhängig

- Rechnung durch gegebene Anleitung

- Ohmsches Gesetz

(A37=A5.1)

$$R = \frac{\ln \rho_2 / \rho_1}{2\pi\sigma l} \quad \text{Widerstand der Scheibe bei } B=0$$

- integrale Maxwell und ohmsches Gesetz, einfache Symmetrieüberlegungen \rightarrow Ansatz für J

(A42)

„zerfließende Raumladung in einem Metall“ geg, Raumladung $\rho(t=0,r)$, nach welchem Gesetz zerfließt sie ?

$$\dot{\rho}(t, \vec{r}) + \frac{\kappa}{\epsilon_0} \rho(t, \vec{r}) = 0 \quad \rho(t, \vec{r}) = \rho(t=0, \vec{r}) \cdot e^{-t/T} \quad T = \frac{\epsilon_0}{\kappa} \approx 10^{-19} \text{ sec in Cu}$$

- aus Kontinuitätsgleichung, ohmschem Gesetz für ruhende Körper und Maxwell 3.1

(A36)

Apolonius - Ansatz

Soll von den Punkten Q' und Q gelten:

$r = k \cdot r'$ dann gelten folgende Beziehungen

$$k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

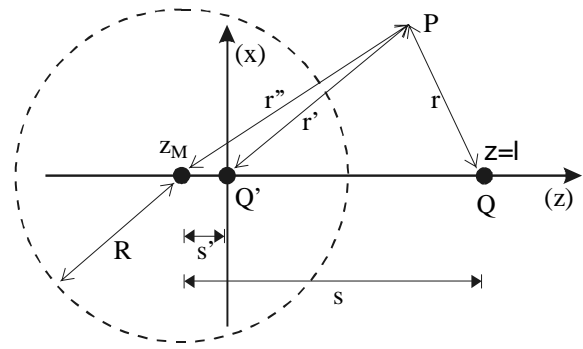
$$s s' = R^2 \quad s = \frac{k^2 l}{k^2 - 1} \quad s' = \frac{l}{k^2 - 1}$$

$$R = \frac{kl}{k^2 - 1} \quad z_M = -s' = \frac{-l}{k^2 - 1}$$

bei Punktladung und influenzierter Metall-Kugel gilt

$$q' = -\frac{R}{s} q \quad q' = -\frac{1}{k} q \quad k = \frac{s}{R} \quad k > 1$$

$$Q_0 = q' + q'' \quad \varphi_0 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_0}{R} + \frac{q}{s} \right)$$



Alle gesuchten Punkte mit einem konstanten k sind Kreise mit Radius R und Mittelpunkt bei z_M .

Bemerkungen zum HALL - Effekt aus Anhang von ZA24

Zunächst ist zu unterscheiden, ob nur p, oder nur n-Leitung

p-Leitung

$$\vec{F}_p = e(\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

$$\vec{u}_p = \frac{b_p}{e} \vec{F}_p = b_p (\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

$$\vec{J}_p = pe\vec{u}_p = pe b_p (\vec{E} + \vec{u}_p \times \vec{B})$$

also

$$\vec{J}_p = \underbrace{pe b_p}_{\kappa_p} \vec{E} + b_p \vec{J}_p \times \vec{B}$$

$$R_H = \frac{b_p}{\kappa_p} = \frac{1}{pe} > 0$$

n-Leitung

$$\vec{F}_n = -e(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

$$\vec{u}_n = \frac{b_n}{e} \vec{F}_p = -b_n (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

$$\vec{J}_n = n(-e)\vec{u}_n = neb_n (\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B})$$

also

$$\vec{J}_n = \underbrace{neb_n}_{\kappa_n} \vec{E} - b_n \vec{J}_n \times \vec{B}$$

$$R_H = -\frac{b_n}{\kappa_n} = \frac{1}{-en} < 0$$

n,p jeweilige Volumenkonzentration (nichtnegativ), u jeweilige Geschwindigkeit, κ jeweilige Leitfähigkeit (nichtnegativ), das Vorzeichen des Hallwiderstandes ist abhängig von der Leitungsart !

Wirken beide Effekt zusammen gilt weiterhin:

$$\text{mit } \vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_n$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, \quad \text{wobei } \vec{E}_{\parallel} \parallel \vec{J} \text{ ist,}$$

$$\text{und } \kappa = \kappa_p + \kappa_n$$

ergeben sich die rechts stehenden Zusammenhänge:

$$\vec{J} = (\kappa_n + \kappa_p) \vec{E}_{\parallel}$$

$$\vec{J}_p = \frac{\kappa_p}{\kappa_p + \kappa_n} \vec{J} \quad \text{und} \quad \vec{J}_n = \frac{\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_p} \vec{J}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} - \underbrace{\frac{pb_p^2 - nb_n^2}{e(pb_p + nb_n)^2}}_{R_H} \vec{J} \times \vec{B}$$

$$\text{also } R_H = \frac{pb_p^2 - nb_n^2}{e(pb_p + nb_n)^2}$$

D. Mathematische Formeln

... aus dem Bronstein S.46, 47

Wichtige Integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \sqrt{a^2 + x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}^3} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C_2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}^3} dx = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}^3} dx = \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2) + C$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \cos(2ax)$$

$$\int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$